Théorème « Critère de divergence »

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ une série.

Si $\lim_{k\to\infty} |u_k| \neq 0$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est divergente.

Contraposée : Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est convergente, alors $\lim_{k\to\infty} |u_k| = 0$.

Démonstration de la contraposée

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = L$.

On pose $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles.

On a : $\lim_{k\to+\infty} s_k = L$, car [ARG 1 : ……………………………..……...]

mais aussi : $\lim_{k\to+\infty} s_{k-1} = L$, car [ARG 2 : ………………………..………....]

donc $\lim_{k\to+\infty} s_k - \lim_{k\to+\infty} s_{k-1} = 0$, car [ARG 3 : ……………………...….]

$\Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} (s_k - s_{k-1}) = 0$, car [ARG 4 : …………………………………..]

$\Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} u_k = 0$, car [ARG 5 : ………………………………………]

Nous avons $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$; il reste à parler de $\lim_{k\to+\infty} |u_k| = 0$:

on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ tel que $\forall k \geq N$, on a : $|u_k - 0| < \varepsilon$,

car [ARG 6 : ………………………………………]

c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ tel que $\forall k \geq N$, on a : $|u_k| < \varepsilon$

qu'on peut aussi écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ tel que $\forall k \geq N$, on a : $\big|\, |u_k| \,\big| < \varepsilon$

et donc en déduire que $\lim_{k\to+\infty} |u_k| = 0$, car [ARG 7 : …………………..]