Théorème « Critère du quotient (ou critère de D'Alembert) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ à termes positifs, càd $u_k \geq 0, \forall k$ et la limite $\lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c$.

i) Si $c < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

ii) Si $c > 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

iii) Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Démonstration

i) On sait que $\lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c < 1$, car [ARG 1 : ……..…….]

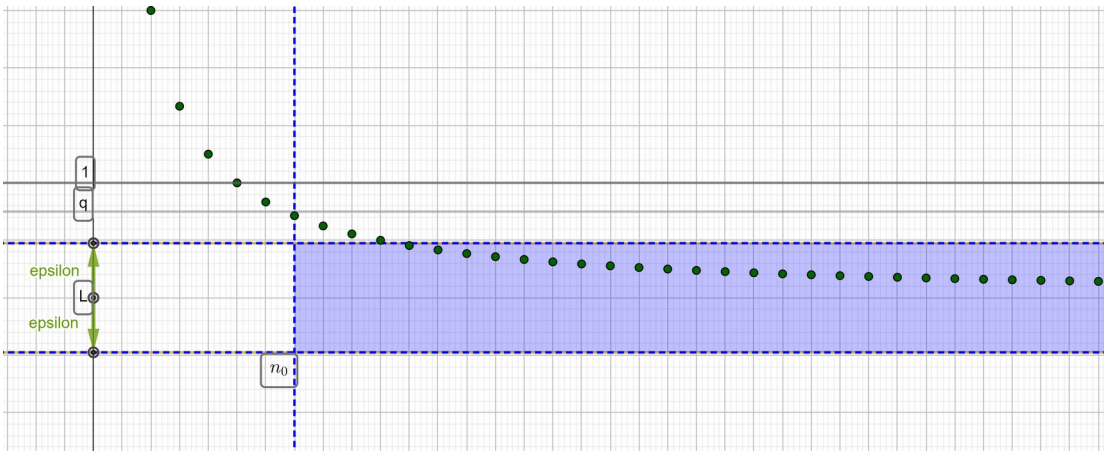
On peut choisir un q tel que $c < q < 1$,

car [ARG 2 : …….……..……..]

donc il existe un n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} < q$,

car [ARG 3 : …….……..……..]

Illustration graphique :



On obtient ainsi : $u_{n_0+1} < q \cdot u_{n_0}$, car [ARG 4 : ……..……..]

puis : $u_{n_0+2} < q \cdot u_{n_0+1} < q^2 \cdot u_{n_0}$, car [ARG 5 : ……...…….....]

et : $u_{n_0+k} < q^k \cdot u_{n_0}$, car [ARG 6 : ……...…...…….……..]

Or on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge, car [ARG 7 : ……...….……..]

comme $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \cdot u_{n_0} = u_{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, car [ARG 8 : ……..…...….……..]

on a : $u_{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge, car [ARG 9 : ……....….……..]

On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n_0+k}$ converge,

car [ARG 10 : …….……..……..]

et donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge,

car [ARG 11 : …….……..……..]

ii) On sait que $\lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c > 1$, car [ARG 12 : …..……..…….]

On peut choisir un q tel que $c > q > 1$,

car [ARG 13 : …..…….……..……..]

donc il existe un n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} > q$,

car [ARG 14 : ...…….……..……..]

On obtient ainsi : $u_{n_0+1} > q \cdot u_{n_0}$, car [ARG 15 : ……..……..]

puis : $u_{n_0+k} > q^k \cdot u_{n_0}$, car [ARG 16 : ……...…...…….……..]

Or on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ diverge, car [ARG 17 : …….....….……..]

donc $u_{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ diverge, car [ARG 18 : ……..…...….……..]

On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n_0+k}$ diverge,

car [ARG 19 : …….……..……..]

et donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ diverge,

car [ARG 20 : …….……..……..]

iii) Pour $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$, on a c = 1 et la série diverge.

Pour $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, on a c = 1 et la série converge.