

Emilien,
Léo,
Ester

Travail de groupe

Act 21.3

$$\sum_{n \geq 0} \frac{4}{n!} \cdot x^n \quad [\text{crit. de D'Alembert}]$$

603

28/3/2023

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{4x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4x^n}{n!}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4x^{n+1} \cdot n!}{4x^n \cdot (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4x^{n+1}}{4x^n \cdot (n+1)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|}{n+1} \right) = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = |x| \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall x$, la série converge puisqu'elle est absolument convergente
avec $x \in]-\infty; +\infty[$ ✓

ex 30b

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^n} \quad [\text{crit. de Cauchy}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n^n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|}{n} \right) = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = |x| \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \forall x$, la série converge puisqu'elle est absolument convergente
avec $x \in]-\infty; +\infty[$ ✓

Activité 21

3] $\sum_{n \geq 0} \frac{4}{n!} x^n$ Crit. quotient: $\lim_{\infty} \left| \frac{4}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot \frac{n!}{4x^n} \right| = \lim_{\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x|$
 $= |x| \cdot \lim_{\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0$

→ converge toujours ✓
 rayon de convergence: ∞

Ex 30

d) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n$

Crit quo: $\lim_{\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = \lim_{\infty} \left| \frac{x \cdot n}{n+1} \right| = |x| \cdot \lim_{\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$

donc si $|x| > 1$, la série converge

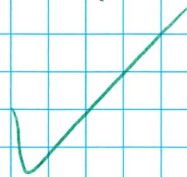
si $|x| < 1$, la série diverge

pour $x=1$: $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow$ converge

pour $x=-1$: $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n}$

$= - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} \rightarrow$ diverge

converge si $-1 < x \leq 1 \rightarrow$ rayon = 1



Baltazar
Noam
Céleste
Aurélien

Groupe 3

Activité 21

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n!} x^n$$

on applique le critère du quotient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4 x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4 x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

ça converge! toujours, $\forall x \in \mathbb{R}$

ex 31:

$$d) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \cdot n!}{(n+3)!}$$

on applique le critère du quotient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)} \cdot (n+1)!}{(n+4)!} \cdot \frac{(n+3)!}{x^{2n} \cdot n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2 \cdot (n+1)}{n+4} \right|$$

$$= |x^2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+4} = |x^2| \cdot 1$$

$-1 < x^2 < 1$: converge

les restes : diverge

Car? + en $x = -1$?
en $x = 1$?

Antonin
Alexia
Evan

GM

ex 23 e)

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

Sachant que la série harmonique diverge et que notre série est plus grande, la série diverge.

ex 26 a)

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{180 \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{180 \cdot 2^n}}$$
$$= \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{180} \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Sachant que $c > 1$, alors la série diverge.

ex. 28

e) $u_k = \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} = \ln(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$

\hookrightarrow diverge (série de Riemann)

Sachant que $\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k^{1/2}}$, la série diverge.

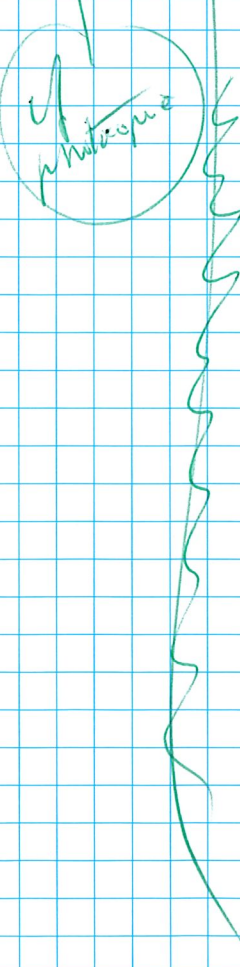
g) $u_k = \frac{k!}{2^{k+1}} \cdot (-1)^k$

$0 < b_{k+1} < b_k \Leftrightarrow$

$0 < b_{10+1} < b_{10} \Leftrightarrow$

\hookrightarrow faux dans notre cas

Sachant que $\frac{k!}{2^{k+1}} \cdot (-1)^k$ ne respecte pas une des conditions du thm « critère de convergence d'une série alternée », la série est divergente.



Gr5

Erik Dorian Lanza

28. Mars 2013

29.c.

[critère de comparaison]

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

~~$\Gamma a_n \leq a_n$ pas forcément!~~

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma a_n$ converge.

28.i

$$u_k = \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \right| = 0$$

~~NON!!!~~
~~donc ça converge.~~

activité 21.3:

[critère du quotient]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$$

done? (A...)

A.21.3 $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot \frac{n!}{1 x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ converge $\forall x$ ✓

Ex 31 a)

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \sum_{n \geq 1} n x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (n+1) x^{n+1} \cdot \frac{1}{n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x \right| = |x|$$

on veut $|x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 1}$

si $x=1: \sum_{n \geq 1} n \cdot 1^n = \sum_{n \geq 1} n \rightarrow$ diverge

si $x=-1: \sum_{n \geq 1} n \cdot (-1)^n$

~~\rightarrow critère séries alternées: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \stackrel{?}{=} 0$~~

$n = \infty \neq 0 \rightarrow$ diverge

! duplication \neq équivalence