Emilien,
Léo,
Ester

403
28/3/2023

# Travail de groupe

## Act 21.3

$$\sum_{n\geq 0} \frac{4}{n!} \cdot x^n \qquad \text{[crit. de D'Alembert]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left( \frac{\frac{4x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4x^n}{n!}} \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left( \frac{4x^{n+1} \cdot n!}{4x^n \cdot (n+1)!} \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left( \frac{4x^{n+1}}{4x^n \cdot (n+1)} \right) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{|x|}{n+1} \right) = |x| \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = |x| \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \forall x$, la série converge puisqu'elle est absolument convergente avec $x \in ]-\infty ; +\infty[$

## ex30b

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n} x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n} \qquad \text{[crit. de Cauchy]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n^n} \right|} \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{|x|}{n} \right) = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{n} \right) = |x| \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \forall x$, la série converge puisqu'elle est absolument convergente avec $x \in ]-\infty ; +\infty[$

Gr2 Alexis, Rebecca, Océane, Djelany

## Activité 21

3] $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{n!} x^n$ Crit. quotient : $\lim_{\infty} \left| \frac{4}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot \frac{n!}{4x^n} \right| = \lim_{\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right|$

$= |x| \cdot \lim_{\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0$

$\rightarrow$ converge toujours

rayon de convergence : $\infty$

## Ex 30

d) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n$

Crit quo : $\lim_{\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = \lim_{\infty} \left| \frac{x \cdot n}{n+1} \right| = |x| \cdot \lim_{\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$

donc si $|x| > 1$, la série converge

si $|x| < 1$, la série diverge

pour $x = 1$ : $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ $\rightarrow$ converge

pour $x = -1$ : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n}$

$= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ $\rightarrow$ diverge

converge si $-1 < x \leq 1$ $\rightarrow$ rayon $= 1$

Baltazar
Noam
Céleste
Aurelien

Groupe 3

Activité 21

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{n!} x^n$

on applique le critère du quotient

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{4} x^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{4 x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Ça converge ! toujours, $\forall x \in \mathbb{R}$

ex 31 :

c) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^2}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^4}{3\cdot4\cdot5} + \dots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}\cdot n!}{(n+3)!}$

on applique le critère du quotient

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)} \cdot \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+4)!}} \cdot \frac{\cancel{(n+3)!}}{\cancel{x^{2n}} \cdot \cancel{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2 \cdot (n+1)}{n+4} \right|$$

$$= |x^2| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+4} = |x^2| \cdot 1$$

$-1 \cancel{\leq} x \cancel{\leq} 1$ : converge

les reste : diverge

car? $+$ en $x = -1$ ?

en $x = 1$ ?

Antonin
Alexia
Evan
GR4

## ex 23 e)

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

Sachant que la série harmonique diverge et que notre série est plus grande, la série diverge

## ex 26 a)

$$c = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{180 \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{180 \cdot 2^n}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt[n]{180} \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Sachant que $c > 1$, alors la série diverge.

U phitique

## ex. 28

e) $u_k = \dfrac{\ln(k)}{\sqrt{k}} = \ln(k) \cdot \dfrac{1}{k^{1/2}}$

↳ diverge (série de Riemann)

Sachant que $\dfrac{\ln(k)}{\sqrt{k}} > \dfrac{1}{k^{1/2}}$, la série diverge.

g) $u_k = \dfrac{k!}{2^k+1} \cdot (-1)^k$

$0 < b_{k+1} < b_k$ (=)

$0 < b_{10+1} < b_{10}$ (=)

↳ faux dans notre cas

Sachant que $\frac{k!}{2^k+1} \cdot (-1)^k$ ne respecte pas une des conditions du thm « critère de convergence d'une série alternée », la série est divergente.

6/6

Erik Dorian Lana

28. Mars 2023

29.c.

[critère de comparaison]

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\quad \cancel{\sqrt{a_n} \leq a_n}$ pas forcément!

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

28.i

$u_k = \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge

$\lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| = 0$ ✓ $\quad$ NON!!! ~~donc~~ ça converge.

activité 21.3:

[critère du quotient]

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4x^n} \right| = \underbrace{|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{\text{donc?}}$$

+...

Aaron
Vincent
Mathieu
Mathilde

Gr6

A.21.3 $\sum_{n \geq 0} \frac{4}{n!} x^n$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{4}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot \frac{n!}{4x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{4}{n!} x^n$ converge $\forall x$ ✓

Ex 31 a)

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = \sum_{n \geq 1} n x^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| (n+1) x^{(n+1)} \cdot \frac{1}{n x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x \right| = |x|$$

on veut $|x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 1}$

si $x = 1$ : $\sum_{n \geq 1} n \cdot 1^n = \sum_{n \geq 1} n \to$ diverge

si $x = -1$ : $\sum_{n \geq 1} n \cdot (-1)^n$

$\to$ ~~critère séries alternées~~ : $\lim_{n \to \infty} n \overset{?}{=} 0$

$n = \infty \neq 0 \to$ diverge

⚠ implication ≠ équivalence