ex20

$\vec{u}\times\vec{v}\ \begin{pmatrix}-1\cdot 3-2\cdot 1\\ 2\cdot 0-1\cdot 3\\ 1\cdot 1-(-1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$ aires des parallelogramme

$\vec{w}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 3-1\cdot 1\\ 1\cdot 0-2\cdot 3\\ 2\cdot 1-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\end{pmatrix}$

$\vec{w}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 2-(-1)\cdot 1\\ 1\cdot 1-2\cdot 2\\ 2(-1)-0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

ex21

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}$ et $\vec{u}\times\vec{w}$ colinéaires
(et non colinéaires)

$\vec{u}\times\vec{v}\ \begin{pmatrix}2\cdot 2-(-1)(-3)\\ -3\cdot 0-1\cdot 2\\ 1\cdot(-1)-2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\times\vec{w}\ \begin{pmatrix}2\cdot 0-(-3)(-3)\\ -3\cdot 1-1\cdot 0\\ 1\cdot(-3)-2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-3\\-5\end{pmatrix}$

ne sont pas colinéaires
donc $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ pas coplanaires

ex22

a) $\vec{u}\times\vec{v}\ \begin{pmatrix}-1\cdot 3-1\cdot 2\\ 2\cdot 0-1\cdot 3\\ 1\cdot 1-(-1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$

b) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{25+9+1}=\sqrt{35}$ donc $\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/\sqrt{35}\\-3/\sqrt{35}\\1/\sqrt{35}\end{pmatrix}$

c) $\sqrt{35}$

ex 23

a) $P=(x;y;z)\in\Pi \Leftrightarrow \vec{AP}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$

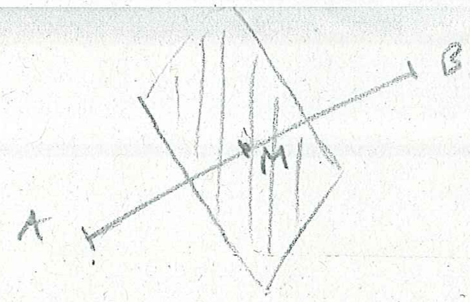
$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 1+(y-1)\cdot 2+(z-1)\cdot 3=0$

$\Leftrightarrow x+2y+3z-7=0$

b) $\Pi: 2x+0y-4z=3$

d'où $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}\perp\Pi$

ex25 :



point milieu de [AB] : $M\left(\frac{0+2}{2}\,;\,\frac{1+1}{2}\,;\,\frac{-2+0}{2}\right) = (1;1;-1)$

$M \in \Pi$

vecteur normal de Π : $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-0\\1-1\\0-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

éq. cart de Π : soit $P(x;y;z)\in\Pi$

$$\vec{MP}\cdot\vec{AB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-(-1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+2(z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+z=0}$$

ex26 : $\vec{n}\perp\Pi$ est donné par :

$$\vec{n}=\vec{OC}\times\vec{OB}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+4\cdot2\\-3\cdot5\\3\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-15\\6\end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ est vecteur directeur de la droite $d\perp\Pi$ par O

$\|\vec{n}\|=\sqrt{13^2+(-15)^2+6^2}=\sqrt{430}$

Soit
$\vec{P_A}$ la projection de $\vec{OA}$ sur $\vec{n}$
$\vec{P_B}$ " " " $\vec{OB}$ sur $\vec{n}$

$$\vec{P_A}=\frac{\vec{n}\cdot\vec{OA}}{\|\vec{n}\|^2}\cdot\vec{n}=\frac{\begin{pmatrix}13\\-15\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}}{430}\cdot\vec{n}$$

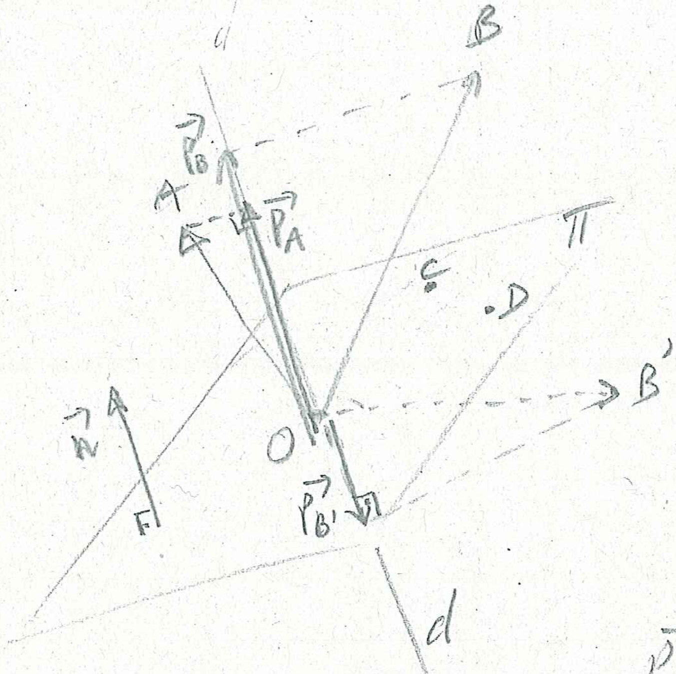
$$=\frac{-13-30+18}{430}\cdot\vec{n}$$

$$=\frac{-25}{430}\vec{n}$$

$$\vec{P_B}=\frac{\vec{n}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{n}\|^2}\cdot\vec{n}=\frac{\begin{pmatrix}13\\-15\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}{430}\cdot\vec{n}$$

$$=\frac{0+15+12}{430}\vec{n}$$

$$=\frac{27}{430}\vec{n}$$



$\vec{P_A}$ et $\vec{P_B}$ n'ont pas le même sens donc A et B sont situés de part et d'autre de Π

ex 24

vect $\vec{n} \perp$ à Π' : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est vect directeur de Π

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \neq k\vec{AB}$ donc $\vec{AB}\times\vec{n}$ est un vecteur normal à Π

$\vec{AB}\times\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1\\-(1-2)\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \vec{m}$

équat de Π : soit $P(x;y;z)\in\Pi$:

$\vec{AP}\cdot\vec{m}=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow x-1+y-1-z=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x+y-z-2=0}$

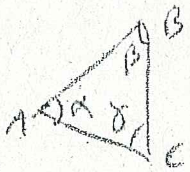
---

ex 27

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-(-1)\\3-(-1)\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\|=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\-2-(-1)\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\|=\sqrt{2}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-2-2\\-2-3\\0-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\|=\sqrt{16+25+1}=\sqrt{42}$



$\cos(\alpha)=\dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|}=\dfrac{3(-1)+4(-1)+(-1)\cdot 0}{\sqrt{2}\sqrt{26}}=\dfrac{-7}{\sqrt{52}}$

$\alpha \cong 166{,}1°$

$\cos(\beta)=\dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\|\vec{BC}\|}=\dfrac{\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\sqrt{42}}=\dfrac{+33}{\sqrt{26\cdot 42}}=\dfrac{33}{\sqrt{4\cdot 273}}=\dfrac{33}{2\sqrt{273}}$

$\beta \cong 3°$

$\gamma = 180-\alpha-\beta \cong 10{,}9°$

$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 0-(-1)(-1)\\-(3\cdot 0-(-1)(-1))\\3(-1)-4(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Aire $\Delta ABC=\dfrac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ex 28 $C(x;y;z) \in$ axe Oz $\Leftrightarrow$ $x=y=0$ $\quad C(0;0;z)$

on veut : angle en $A = 90°$ $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-1 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ z-(-3) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 + 4z + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -4$$, donc $C:(0;0;-4)$

x 29 $P(-2;1;3)$ $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Soit $Q(x;y;z)$ un point de π

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) + 0 + 3(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3z - 7 = 0$$

b) $$\delta(\pi;O) = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0 - 7|}{\sqrt{1^2+0^2+(3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

c) $$\delta(\pi;A) = \frac{|1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 3\cdot 3 - 7|}{\sqrt{1^2+0^2+(3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

30 a) $\pi' : 3x + 5y - 7z - 11 = 0$

vect $\vec{m} \perp \pi'$: $\vec{m}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

donc $\vec{m}$ aussi $\perp$ à π'' : Soit $Q(x;y;z) \in \pi''$

$$\vec{AQ} \cdot \vec{m} = 0$$

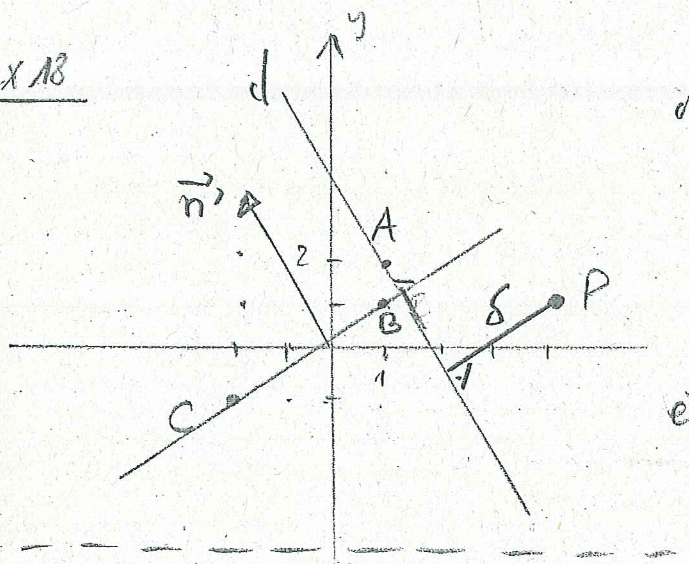
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-3) \\ z-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2) + 5(y+3) - 7(z-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5y - 7z + 44 = 0$$

b) $$\delta(\pi';A) = \frac{|3\cdot 2 + 5\cdot(-3) - 7\cdot 5 - 11|}{\sqrt{3^2+5^2+(-7)^2}} = \frac{|-55|}{\sqrt{83}} = \frac{55}{\sqrt{83}}$$

ex 18



$d' : -2x+3y = 1$

$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vect normal à d'

(donc vect. directeur de d)

et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vect normal à d

éq. de d ? $Q(x;y) \in d \Leftrightarrow \vec{AQ} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)+2(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x+2y-7 = 0$

$\delta = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|3\cdot 4+2\cdot 1-7|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$

Autre méthode [avec l'autre formule pour le calcul de la distance pt-droite]

$\delta = \vec{AP} \cdot \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{13}} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \cdot [3\cdot 3 + (-1)\cdot 2]$

$= \dfrac{1}{\sqrt{13}} \cdot 7$

3e méthode [avec vecteur projection]

$\|\overrightarrow{proj_{\vec{n}'} AP}\| = \dfrac{|\vec{n}' \cdot \vec{AP}|}{\|\vec{n}'\|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{13}} = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$

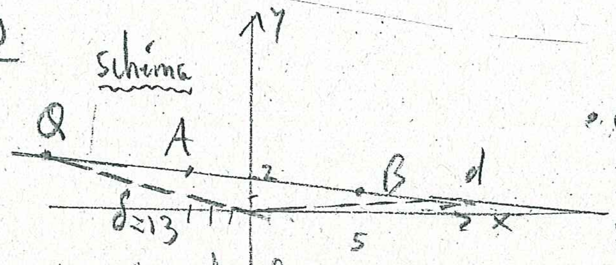
Pythagore : $\delta = \sqrt{\|\vec{AP}\|^2 - \left(\dfrac{9}{\sqrt{13}}\right)^2}$

$= \sqrt{10 - \dfrac{81}{13}} = \sqrt{\dfrac{49}{13}} = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$

---

ex 19

schéma



on voit sur le schéma qu'il y a 2 solutions...

- équation de d : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ vect normal de d

$P(x;y) \in d \Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x+3+8y-16 = 0$

$\Leftrightarrow x+8y-13 = 0$

a) Soit $Q(x;y)$ le pt cherché de d : $Q \in d \Leftrightarrow x = 13-8y$

On veut : $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 13 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 13^2 \Leftrightarrow (13-8y)^2+y^2 = 169$

$\Leftrightarrow 169 - 208y + 65y^2 = 169 \Leftrightarrow 65y^2 - 208y = 0$

$\Leftrightarrow 13[5y-16] = 0$

$y = 0$ ou $y = 16/5$

$\hookrightarrow x = 13$ $\quad$ $\hookrightarrow x = 13 - 8\cdot 16/5 = -\dfrac{63}{5}$

$Q_1 = (13;0)$ et $Q_2 = (-63/5; 16/5) = (-12{,}6; 3{,}2)$

b) On considère la droite d' passant par l'origine $O(0;0)$ et perpendiculaire à d :

$\overrightarrow{AB}$ vecteur normal à d', donc $P(x;y) \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - y = 0$$

puis $I = d \cap d'$: $\begin{cases} ① \; x + 8y - 13 = 0 \\ ② \; 8x - y = 0 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} \right|$

$+$ ―――――――

$$65x - 13 = 0$$

$$x = 13/65 = 1/5 = 0{,}2$$

dans ② : $y = 8x = 8/5 = 1{,}6$

donc $I = (0{,}2 ; 1{,}6)$

$$\delta(O;d) = \| \overrightarrow{OI} \| = \left\| \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0{,}2^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{2{,}6} \cong 1{,}61$$

<u>Rem</u> : on aurait obtenu ce résultat directement avec la formule :

$$\delta(P;d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|1 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{1^2+8^2}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{65}} \cong 1{,}61$$

ex20

$\vec{u}\times\vec{v}\ \begin{pmatrix}-1\cdot3-2\cdot1\\2\cdot0-1\cdot3\\1\cdot1-(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{w}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot3-1\cdot1\\1\cdot0-2\cdot3\\2\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\end{pmatrix}$

$\vec{w}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot2-(-1)\cdot1\\1\cdot1-2\cdot2\\2(-1)-0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

aires des parallélogrammes

ex21

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}$ et $\vec{u}\times\vec{w}$ colinéaires
(et non colinéaires)

$\vec{u}\times\vec{v}\ \begin{pmatrix}2\cdot2-(-1)(-3)\\-3\cdot0-1\cdot2\\1\cdot(-1)-2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\times\vec{w}\ \begin{pmatrix}2\cdot0-(-3)(-3)\\-3\cdot1-1\cdot0\\1\cdot(-3)-2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-3\\-5\end{pmatrix}$

ne sont pas colinéaires
donc $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ pas coplanaires

ex22

a) $\vec{u}\times\vec{v}\ \begin{pmatrix}-1\cdot3-1\cdot2\\2\cdot0-1\cdot3\\1\cdot1-(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$

b) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{25+9+1}=\sqrt{35}$ donc $\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/\sqrt{35}\\-3/\sqrt{35}\\1/\sqrt{35}\end{pmatrix}$

c) $\sqrt{35}$

ex 23

a) $P=(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \vec{AP}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$

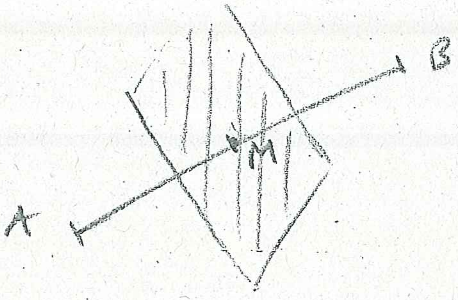
$\Leftrightarrow (x-2)\cdot1+(y-1)\cdot2+(z-1)\cdot3=0$

$\Leftrightarrow x+2y+3z-7=0$

b) $\pi: 2x+0y-4z=3$

d'où $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}\perp\pi$

ex25.



point milieu de $[AB]$: $M\left(\frac{0+2}{2} ; \frac{1+1}{2} ; \frac{-2+0}{2}\right) = (1;1;-1)$

$M \in \Pi$

vecteur normal de Π : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

éq. cart de Π : soit $P(x;y;z) \in \Pi$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 2(x-1) + 2(z+1) = 0$$

$$\iff \boxed{x + z = 0}$$

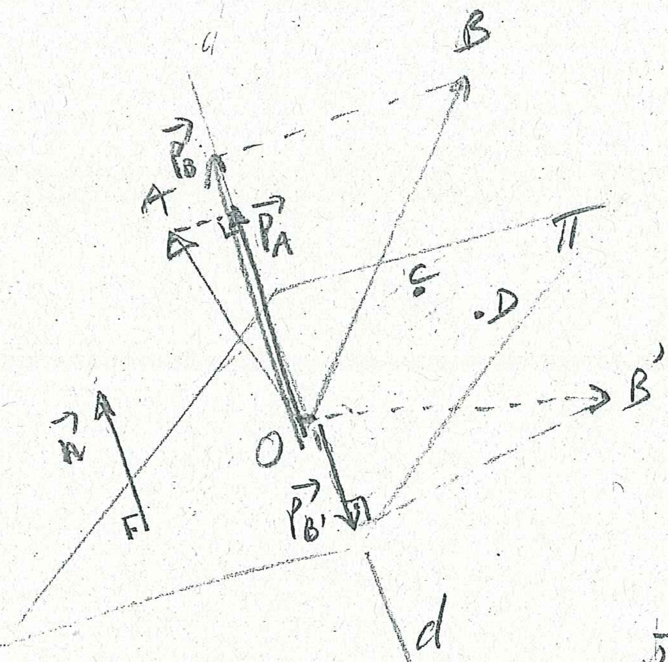
ex26 :

$\vec{n} \perp \Pi$ est donné par :

$$\vec{n} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 4\cdot 2 \\ -3\cdot 5 \\ 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ est vecteur directeur de la droite $d \perp \Pi$ par O

$\|\vec{n}\| = \sqrt{13^2 + (-15)^2 + 6^2} = \sqrt{430}$



Soit
$\begin{cases} \vec{P_A} \text{ la projection de } \overrightarrow{OA} \text{ sur } \vec{n} \\ \vec{P_B} \text{ " " " } \overrightarrow{OB} \text{ sur } \vec{n} \end{cases}$

$$\vec{P_A} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{430} \cdot \vec{n}$$

$$= \frac{-13 - 30 + 18}{430} \cdot \vec{n}$$

$$= \frac{-25}{430} \vec{n}$$

$$\vec{P_B} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{430} \cdot \vec{n}$$

$$= \frac{0 + 15 + 12}{430} \vec{n}$$

$$= \frac{27}{430} \vec{n}$$

$\vec{P_A}$ et $\vec{P_B}$ n'ont pas le même sens donc A et B sont situés de part et d'autre de Π

ex 24

vect $\vec{n} \perp$ à Π' : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est vect directeur de Π

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \neq k\vec{AB}$ donc $\vec{AB}\times\vec{n}$ est un vecteur normal à Π.

$\vec{AB}\times\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1\\-(1-2)\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \vec{m}$

éq. cart de Π : soit $P(x;y;z) \in \Pi$:

$$\vec{AP}\cdot\vec{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1+y-1-z=0$$

$$\Leftrightarrow [x+y-z-2=0]$$

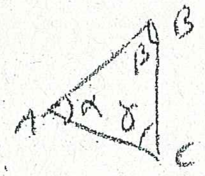
---

ex 27

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-(-1)\\3-(-1)\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\-2-(-1)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{2}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-2-2\\-2-3\\0-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$



$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|} = \dfrac{3(-1)+4(-1)+(-1)\cdot 0}{\sqrt{2}\sqrt{26}} = \dfrac{-7}{\sqrt{52}}$

$\alpha \cong 166{,}1°$

$\cos(\beta) = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\|\vec{BC}\|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\sqrt{42}} = \dfrac{+33}{\sqrt{26\cdot 42}} = \dfrac{33}{\sqrt{4\cdot 273}} = \dfrac{33}{2\sqrt{273}}$

$\beta \cong 3°$

$\gamma = 180 - \alpha - \beta \cong 10{,}9°$

$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot 0-(-1)(-1)\\-(3\cdot 0-(-1)(-1))\\3(-1)-4(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Aire $\Delta ABC = \dfrac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ex 28 $C(x;y;z) \in$ axe Oz $\Leftrightarrow x=y=0$: $C(0;0;z)$

on veut : angle en $A = 90°$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-1 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ z-(-3) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6-2+4z+12=0$$

$$\Leftrightarrow z=-4$$, donc $C:(0;0;-4)$

ex 29 $P(-2;1;3)$ $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Soit $Q(x;y;z)$ un point de π

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)+0+3(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x+3z-7=0$$

b) $$\delta(\pi;O) = \frac{|1\cdot 0+0\cdot 0+3\cdot 0-7|}{\sqrt{1^2+0^2+(3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

c) $$\delta(\pi;A) = \frac{|1\cdot 2+0\cdot 1+3\cdot 3-7|}{\sqrt{1^2+0^2+(3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

ex 30 a) $\pi' : 3x+5y-7z-11=0$

vect $\vec{m} \perp \pi'$: $\vec{m}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

donc $\vec{m}$ aussi $\perp$ à π'' : Soit $Q(x;y;z) \in \pi''$

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-3) \\ z-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)+5(y+3)-7(z-5)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+5y-7z+44=0$$

b) $$\delta(\pi';A) = \frac{|3\cdot 2+5\cdot(-3)-7\cdot 5-11|}{\sqrt{3^2+5^2+(-7)^2}} = \frac{|-55|}{\sqrt{83}} = \frac{55}{\sqrt{83}}$$

Remarque pour l'ex 30 a)

π' : $3x+5y-7z-11=0$

et on veut $\pi'' \parallel \pi'$, donc $\vec{n}_{\pi''} = \vec{n}_{\pi} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

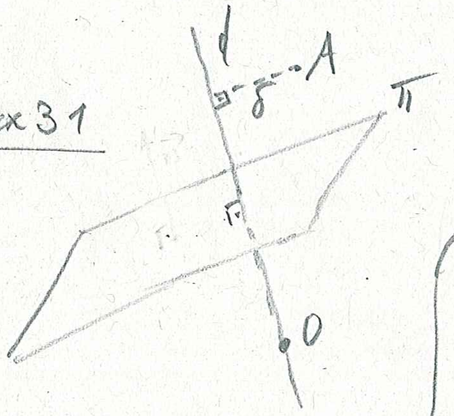
donc π'' : $3x+5y-7z+d=0$

on veut $A(2;-3;5) \in \pi'' \Leftrightarrow 3\cdot 2+5(-3)-7\cdot 5+d=0$

$\Leftrightarrow -44+d=0 \Leftrightarrow d=44$

donc π'' : $3x+5y-7z+44$

ex 31

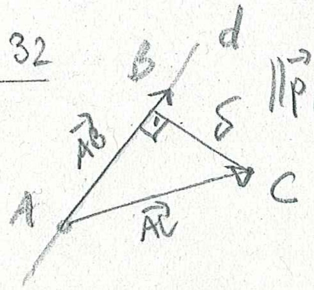


donc $\delta = \dfrac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

π : $1\cdot x - 1\cdot y + 1z = 3$

$\Leftrightarrow 1x - 1\cdot y + 1\cdot z - 3 = 0$

ex 32



$\|\vec{p}\| = \left\| \overrightarrow{\text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC}} \right\| = \dfrac{|\vec{AB}\cdot\vec{AC}|}{\|\vec{AB}\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{(1+4+6)}{3} = \dfrac{11}{3}$

$\delta = \sqrt{\|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{p}\|^2}$

$= \sqrt{14-\left(\dfrac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$