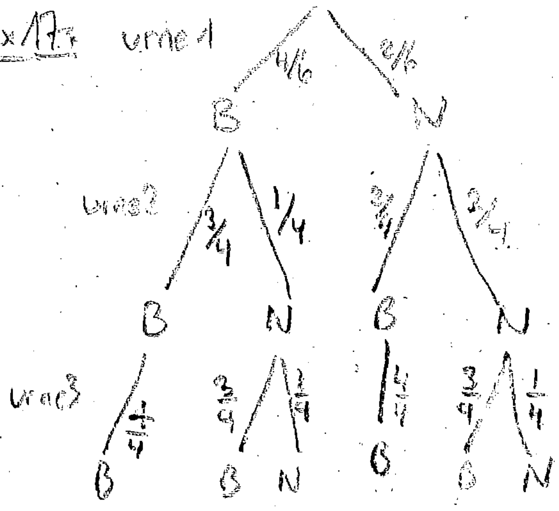
ex17 : urne 1



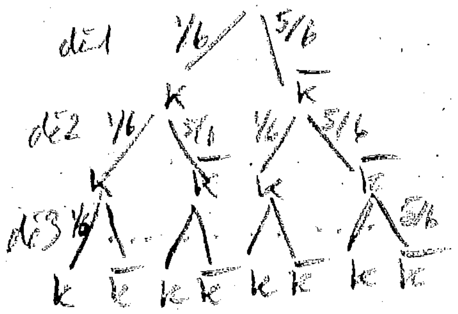
$$P(N) = \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

X : gain

x	1200	-120
ω	N	B
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$

$$E(X) = 1200\cdot\frac{1}{12} + (-120)\,\frac{11}{12}$$
$$= 100 - 110$$
$$= -10.-$$

ex18 : Soit k le nombre choisi ($k \in \{1;2;\dots;6\}$) et m la mise ($m \geq 0$)



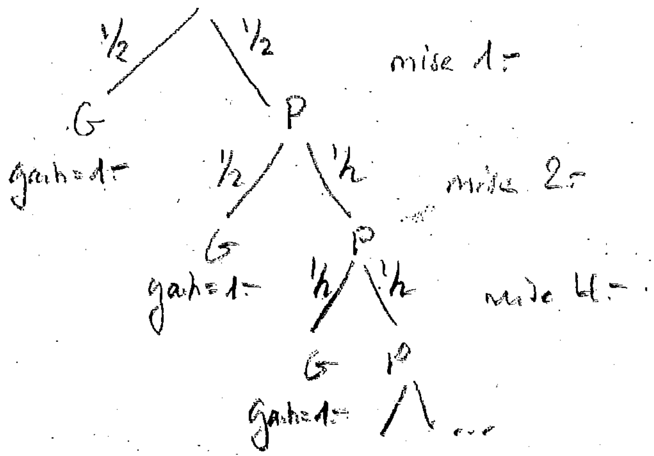
X : gain

x	$-m$	m	$2m$	$3m$
ω	$\bar{k}\bar{k}\bar{k}$	$k\bar{k}\bar{k}$ $\bar{k}k\bar{k}$ $\bar{k}\bar{k}k$	$kk\bar{k}$ $k\bar{k}k$ $\bar{k}kk$	kkk
P	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$3\,\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

$$P(X=3m) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$P(X=2m) = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$$
$$P(X=m) = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$$
$$P(X=-m) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$E(X) = -m\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + m\,3\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + 2m\,3\,\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3m\left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$= \frac{1}{6^3}\left[-125m + 75m + 30m + 3m\right]$$
$$= -\frac{17}{216}\,m \cong -0{,}08m$$

ex19 :



X : gain

a) • S'il n'a que 100.-, il doit arrêter de miser :

mise totale : $1+2+4+8+16+32 = 63.-$

après 6 coups, il ne lui reste que $100-63 = 37.-$; il ne peut plus continuer

$P(\text{perdre}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ et $P(\text{gagner}) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^6$

X :

x	-63	$1.-$
ω	P	G
p	$\frac{1}{2^6}$	$1-\frac{1}{2^6}$

$$E(X) = -\frac{63}{2^6} + \left(1-\frac{1}{2^6}\right)\cdot 1 = -\frac{63}{64} + 1 - \frac{1}{64} = 0.- \,!$$

• Si il a une somme illimitée (et un temps infini !) :

$P(\text{perdre}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et $P(\text{gagner}) = 1-0 = 1$

X :

x	...	1
ω	P	G
p	0	1

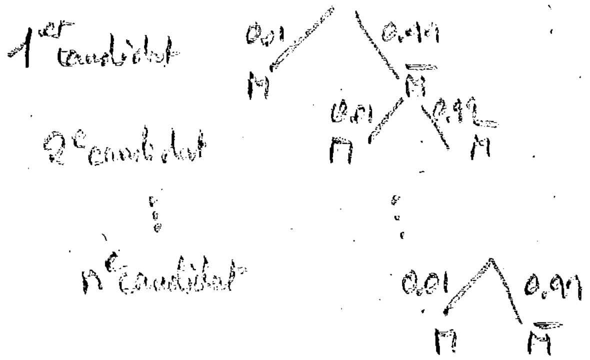
$$E(X) = 1\cdot 1 = 1.-$$

Si il joue beaucoup de fois, il gagnera beaucoup !

Remarque : cette façon de jouer est interdite !

ex20 a) Ex indiv : nombre d'analyses = n, d'où $E(X)=n$

Ex groupés : X_n = "nbre d'analyses"



$p(n \text{ candidats } \overline{M}) = 0{,}99^n$

$p(\text{au moins un candidat malade}) = 1 - 0{,}99^n$

X_n :

x	1	n+1
p	$0{,}99^n$	$1-0{,}99^n$

d'où $E(X_n) = 1\cdot 0{,}99^n + (n+1)(1-0{,}99^n)$

$= 0{,}99^n + n + 1 - n\,0{,}99^n - 0{,}99^n$

$= 1 + n(1-0{,}99^n)$

b) $diff(n) = n - \left(1+n\left(1-\left(\frac{99}{100}\right)^n\right)\right) = n\cdot 0{,}99^n - 1 = n\cdot e^{\ln 0{,}99^n} - 1$

$diff'(n) = e^{\ln 0{,}99^n} + n\cdot(n\cdot \ln 0{,}99)'\, e^{\ln 0{,}99^n}$

$= e^{\ln 0{,}99^n}\left[1+n\cdot\ln 0{,}99\right] = 0{,}99^n\,(1+n\cdot\ln 0{,}99)$

$diff'(n) = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{\ln 0{,}99} \cong 99{,}49$

n		$-\frac{1}{\ln 0{,}99}$	
$diff'(n)$	+	0	−
$diff(n)$	↗	Max	↘

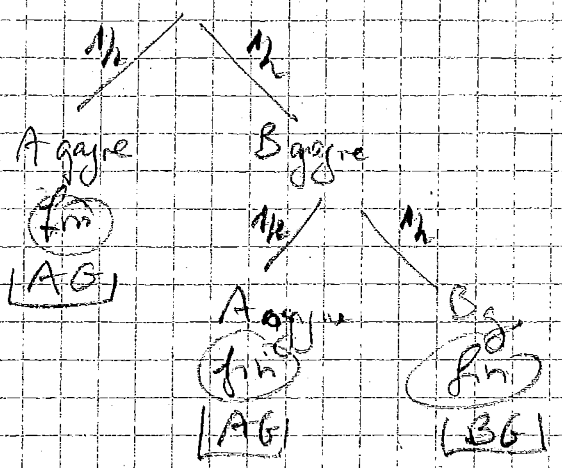
pour des valeurs entières, le max est atteint soit pour $n=99$ soit pour $n=100$:

$diff(99) = 99\cdot 0{,}99^{99} - 1 \cong 35{,}6$

$diff(100) = 100\cdot 0{,}99^{100} - 1 \cong 35{,}6$

Pour 100 personnes, l'économie est de 35,6 ex, donc 35,6 % d'économie

ex21 à ce stade du jeu :



X : pistoles pour A

x	0	64
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$E(X) = 0\cdot\frac{1}{4} + 64\cdot\frac{3}{4} = 48$

Y : pistoles pour B

x	0	64
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(Y) = 0\cdot\frac{3}{4} + 64\cdot\frac{1}{4} = 16$

A reprend 48 p. et B 16 p.

ex22 X = total des 3 dés

X_i = résultat du jet i $(i = 1,2,3)$

x	1	2	3	4	5	6
$f_{X_i}(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\Rightarrow E(X_i) = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = 3{,}5$

$X = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow E(X) = \dots = E(X_1) + \dots + E(X_3) = 3\cdot 3{,}5 = 10{,}5$

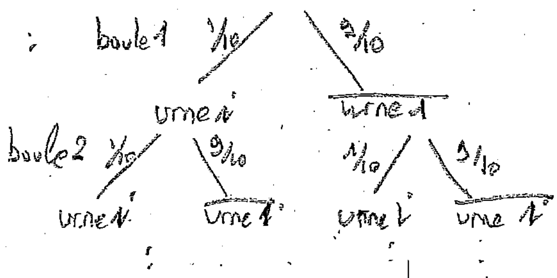
ex23

X = #urnes vides

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$f_X(x)$		?		?	?		?	trop long, trop dur...		

$\Rightarrow$ On pose $X_i := \begin{cases} 1 & \text{si l'urne } i \text{ est vide après la répartition des 10 boules} \\ 0 & \text{si l'urne } i \text{ n'est pas vide " " " "} \end{cases}$

Pour X_i :



donc :

x	0	1
$f_X(x)$	$1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

$\Rightarrow E(X_i) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

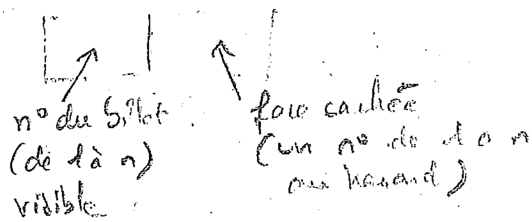
$\boxed{}$ prob que l'urne i reste vide $= \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

On a : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$

d'où : $E(X) = E(X_1 + \dots + X_{10}) \underset{thm}{=} E(X_1) + \dots + E(X_{10}) = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \simeq 3{,}49$

ex.24

n billets



On pose X = nbre de billets gagnants

Pour $n=1$: 1 billet $\boxed{1 \mid 1}$

x	1
$f_X(x)$	1

$E(X) = 1$

$n=2$: 2 séries possibles :

$\boxed{1 \mid 1}$ $\boxed{2 \mid 2}$ ou $\boxed{1 \mid 2}$ $\boxed{2 \mid 1}$

x	0	2
$f_X(x)$	1/2	1/2

$E(X) = 1$

$n=3$:

$\boxed{1 \mid 1}$ $\boxed{2 \mid 2}$ $\boxed{3 \mid 3}$ ou $\boxed{1 \mid 1}$ $\boxed{2 \mid 3}$ $\boxed{3 \mid 2}$ ou $\boxed{1 \mid 2}$ $\boxed{2 \mid 1}$ $\boxed{3 \mid 3}$ ou $\boxed{1 \mid 2}$ $\boxed{2 \mid 3}$ $\boxed{3 \mid 1}$ ou $\boxed{1 \mid 3}$ $\boxed{2 \mid 2}$ $\boxed{3 \mid 1}$ ou $\boxed{1 \mid}$ $\boxed{2 \mid}$ $\boxed{3 \mid}$

$X=3$ $\quad X=1$ $\quad X=1$ $\quad X=0$ $\quad X=1$ $\quad X=0$

x	0	1	3
$f_X(x)$	2/6	3/6	1/6

$\Rightarrow E(X) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$

⋮

Cas général pour n billets : on pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ billet (celui } \boxed{i \mid \dots}\text{) est gagnant} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

x	0	1
$f_{X_i}(x)$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$\Rightarrow E(X_i) = \frac{1}{n}$

On a $X = X_1 + \dots + X_n$

$\Rightarrow E(X) = \dots = n \cdot \frac{1}{n} = 1$!

ex 25 X_n : coût total = coût panne + coût composantes

X_n :

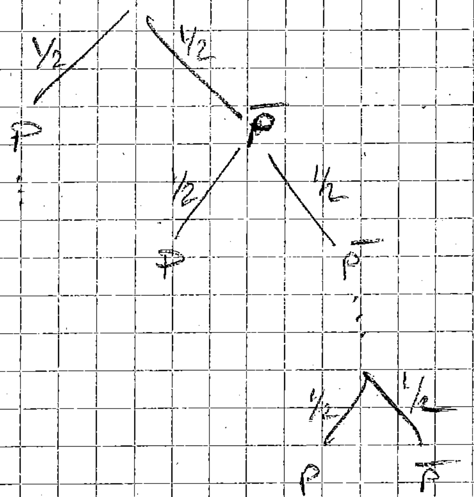
x	$8192+8n$	$8n$
p		
	panne	pas de panne

composante n°1

composante n°2

⋮

composante n°n



$$p(\text{aucune panne}) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\frac{1}{2}}_{n\text{ fois}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p(\text{au moins une panne}) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où :

X_n :

x	$8192+8n$	$8n$
p	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$E(X_n) = (8192+8n)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 8192+8n-8192\left(\frac{1}{2}\right)^n \cancel{-8n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

d'où $E'(X_n) = 8 - 8192\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]'$

⚠ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]' \neq n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$: ce n'est pas un polynôme, c'est une exponentielle

$$E'(X_n) \overset{*}{=} 8-8192\left[e^{\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}\right]' = 8-8192\, e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n}\cdot\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]'$$

$$= 8-8192\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left[n\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]'$$

$$= 8-8192\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

zéros de $E'(X_n)$: $8 - 8192\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{8192 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \ln\left[\frac{8}{8192 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{8}{8192 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow n = \frac{\ln\left[\frac{8}{8192 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 9{,}47$

tableau de signes $E'(X_n)$:

n		9	$\sim 9{,}47$	10
$E'(X_n)$	$- \; - \; - \; -$		0	$+ \; + \; + \; +$
$E(X_n)$	$\searrow$		min	$\nearrow$

on teste pour $n = 9$ et $n = 10$ pour voir où est le coût minimal : $E(X_9) = 88$

$E(X_{10}) = 88$

on peut mettre 9 ou 10 composantes en parallèle pour minimiser le coût total