ex38

a) Vrai, par définition $f(x) \geq 0$

b) Vrai : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ et $f(x) \geq 0 \ \forall x$

donc par propriété de l'intégrale, $F(x) \geq 0$

c) Vrai : $F'(x) = f(x)$ par thm fondamental I

d) Faux, c'est F qui est une primitive de f

contre-ex : $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

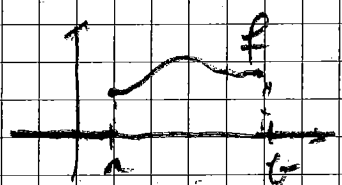
est une fct. de densité (cf. cours)

$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi/2 \\ 0 & \\ \nexists & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$

or $F(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (cf cours)

e) Vrai, cf c) et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t)\,dt = 0$ (intuitivement)

f) Vrai :



$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

donc $f(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$

donc $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$ si $x \leq a$

et comme $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = 1$ par déf.

on a : $F(x) = 1$ si $x \geq b$

g) Vrai : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$ par déf de f.

ex39

a) (i) $P(Z \leq 1{,}17) \cong 87{,}9\%$

(ii) $P(Z \leq 2{,}08) \cong 98{,}12\%$

(iii) $P(Z \leq 5) \cong 1$

(iv) $P(0{,}81 \leq Z \leq 1{,}54) \cong 18{,}28\%$

(v) $P(0 \leq Z \leq 1{,}2) \cong 38{,}49\%$

(vi) $P(Z \leq -1{,}38) \cong 8{,}38\%$

(vii) $P(-0{,}68 \leq Z \leq 0) \cong 25{,}17\%$

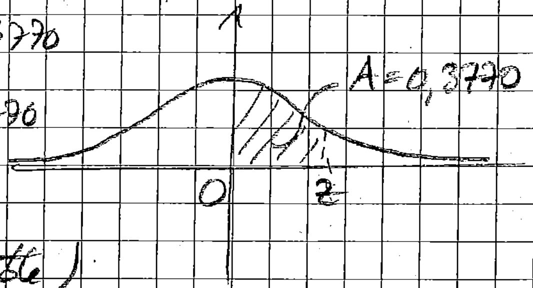
(viii) $P(-0{,}46 \leq Z \leq 2{,}21) \cong 66{,}36\%$

(ex39 suite) (b) $P(0 \leq Z \leq z) = 0,3770$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) - \frac{1}{2} = 0,3770$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) = 0,8770$

$\Leftrightarrow z = 1,26$ (cf table)

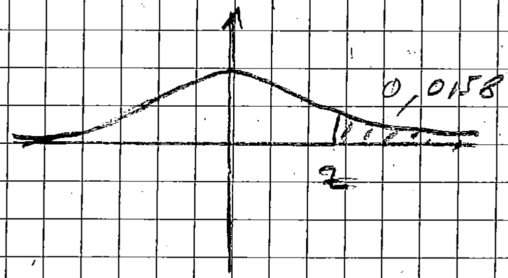


(c) $P(Z \geq z) = 0,0158$

$\Leftrightarrow 1 - P(Z \leq z) = 0,0158$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) = 0,9842$

$\Leftrightarrow z = 2,15$ (cf table)



(d) $P(-1,5 \leq Z \leq z) = 0,0217$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) - P(Z \leq -1,5) = 0,0217$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) - [1 - P(Z \leq 1,5)] = 0,0217$ } cf table

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) - [1 - 0,9394] = 0,0217$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) = 1 - 0,9394 + 0,0217 = 0,0823$

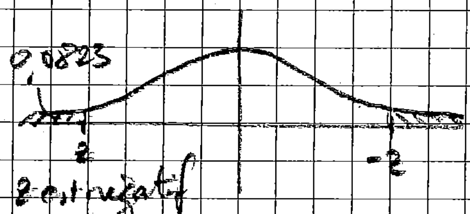
$\Leftrightarrow P(Z \geq -z) = 0,0823$

$\Leftrightarrow 1 - P(Z \leq -z) = 0,0823$

$\Leftrightarrow P(Z \leq -z) = 0,9177$ } cf table

$\Leftrightarrow -z = 1,39$

donc $z = -1,39$



ex40

Le diamètre intérieur moyen d'un échantillon de 200 corps de stylos produits par une machine est de 0,502 cm et l'écart-type moyen est de 0,005 cm. Ne peuvent être acceptées pour des opérations automatiques de montage qui suivent que les pièces dont le diamètre est compris entre 0,496 et 0,508 cm, les autres étant considérées comme défectueuses. Quel est alors le pourcentage de corps de stylos défectueux, sachant que les diamètres des pièces sont distribués normalement ?

0,496 en unités réduites $= (0{,}496 - 0{,}502)/0{,}005 = -1{,}2$

0,508 en unités réduites $= (0{,}508 - 0{,}502)/0{,}005 = 1{,}2$

Proportion de corps réussis

= (aire sous la courbe normale entre $z = -1{,}2$ et $z = 1{,}2$)

= (2 fois l'aire entre $z = 0$ et $Z = 1{,}2$)

$= 2(0{,}3849) = 0{,}7698$ ou 77%

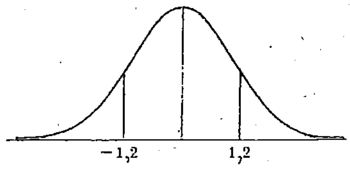


Fig. 4-14

et le pourcentage des cylindres défectueux est 100 % − 77 % = 23 %

Remarquons que si l'intervalle entre les diamètres de 0,496 et 0,508 cm représente effectivement des diamètres compris entre 0,4955 et 0,5085 cm, le résultat ci-dessus sera légèrement modifié.

$P(0{,}4955 < X < 0{,}5085) = P(-1{,}3 < Z < 1{,}3) = 2\,P(0 < Z < 1{,}3)$

$= 2\,[P(Z < 1{,}3) - 0{,}5]$

$= 2\,[0{,}9032 - 0{,}5]$

$= 0{,}8064 \simeq 80{,}6\%$

ex41

Le poids moyen de 500 colis entreposés dans un certain hangar est de 151 kg et l'écart-type est 15 kg. En supposant que ces poids sont normalement distribués, calculer le nombre de colis pesant (*a*) entre 120 et 155 kg, (*b*) plus de 185 kg.

(*a*) Les poids supposés entre 120 et 155 kg peuvent avoir n'importe quelle valeur comprise entre 119,5 et 155,5 kg en supposant qu'ils sont évalués à la livre près.

119,5 kg en unités réduites $= (119{,}5 - 151)/15 = -2{,}10$

155,5 kg en unités réduites $= (155{,}5 - 151)/15 = 0{,}30$

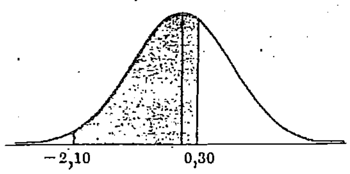


Fig. 4-12

Proportion de colis recherchée = (aire entre $z = -2{,}10$ et $z = 0{,}30$)
= (aire entre $z = -2{,}10$ et $z = 0$)
+ (aire entre $z = 0$ et $z = 0{,}30$)
$= 0{,}4821 + 0{,}1179 = 0{,}6000$

et le nombre de colis pesant entre 120 et 155 kg est 500.0,6000 = 300.

(*b*) Les colis pesant plus de 185 kg doivent peser au moins 185,5 kg.

185,5 kg en unités réduites $= (185{,}5 - 151)/15 = 2{,}30$

Proportion de colis cherchée

= (aire à droite de $z = 2{,}30$)

= (aire à droite de $z = 0$)
− (aire entre $z = 0$ et $z = 2{,}30$)

$= 0{,}5 - 0{,}4893 = 0{,}0107$

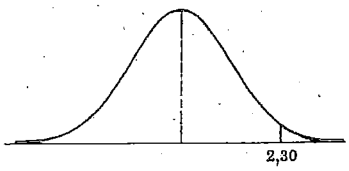


Fig. 4-13

et le nombre de colis pesant plus de 185,5 kg est 500.0,0107 = 5

Si W représente le poids d'un colis pris au hasard, les résultats ci-dessus peuvent être résumés en fonction des probabilités, en écrivant

$P(119{,}5 \leqq W \leqq 155{,}5) = 0{,}6000$ $\qquad P(W \geqq 185{,}5) = 0{,}0107$

×47

Soit $Z \sim N(42,4;1,3)$. Il n'y a de table que pour $N(0;1)$???

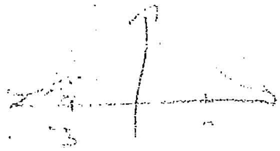
Centrons-réduisons : $X := \frac{Z-\mu}{\sigma} = \frac{Z-42,4}{1,3}$

On a alors : $X \sim N(0;1)$

Car : Prop : Si $Z \sim N(\mu,\sigma)$, alors $X := \frac{Z-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

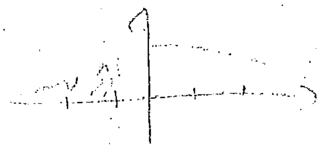
X s'appelle variable centrée-réduite

Dem : ✓



(pour le 39) $P(Z<39,5) \simeq P(X<-2,23) = 1-P(X<2,23)$
$= 0,0129$

sur 5000 chaussures : 64,5



(pour le 40) $P(39,5<Z<40,5) \simeq P(-2,23<X<-1,46)$
$= P(X<2,23) - P(X<1,46)$
$\simeq 0,9871 - 0,9279 = 0,0592$
↳ 296 ch.

⋮

41	866
42	1434
43	1352
44	726
45	220
46	42