ex43

Calculer la probabilité d'obtenir entre 3 et 6 faces (inclusivement) au cours de 10 jets d'une pièce en appliquant les lois de (*a*) la distribution binômiale, (*b*) l'approximation de la loi normale à la distribution binômiale.

(*a*) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de faces au cours des 10 jets. Alors,

$$P(X=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128} \qquad P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256} \qquad P(X=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

Et la probabilité cherchée

$$P(3 \leqq X \leqq 6) = \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} = 0{,}7734$$

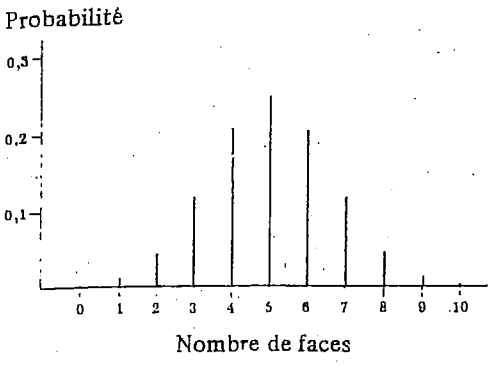


Fig. 4-15

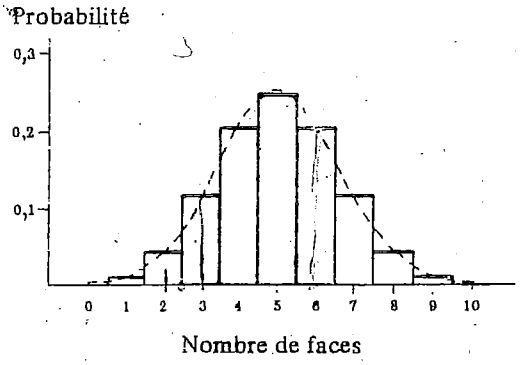


Fig. 4-16

(*b*) Les Fig. 4-15 et 4-16 représentent la distribution de probabilité des faces pour 10 jets, la Fig. 4-16 traitant les données comme si elles étaient continues. La probabilité cherchée est la somme des aires des rectangles ombrés sur la Fig. 4-16 et peuvent être approchés par la surface sous la courbe normale, représentée en tirets. Si l'on traite la variable comme une variable continue, il en résulte que 3 et 6 faces deviennent 2,5 et 6,5 faces. La moyenne et la variance de la distribution binômiale sont $\mu = np = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ et, $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(10)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}58$. Et,

$$2{,}5 \text{ en unités réduites} = (2{,}5 - 5)/1{,}58 = -1{,}58$$

$$6{,}5 \text{ en unités réduites} = (6{,}5 - 5)/1{,}58 = 0{,}95$$

Probabilité cherchée

= aire comprise entre $z = -1{,}58$ et $z = 0{,}95$

= (aire comprise entre $z = -1{,}58$ et $z = 0$

− (aire comprise entre $z = 0$ et $z = 0{,}95$

$= 0{,}4429 + 0{,}3289 = 0{,}7718$

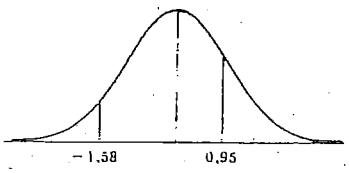


Fig. 4-17

qui est bien comparable au résultat 0,7734 obtenu en (*a*). La précision est encore meilleure pour des valeurs de n supérieures.

ex 44

X = "nbre de faces" $\Rightarrow$ $E(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

$X \sim B(100; \frac{1}{2})$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{25} = 5$

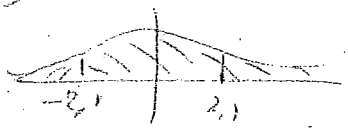
$P(X \geq 40) = ?$

On pose $Y \sim N(50; 5)$ et $Z = \frac{Y-50}{5} \sim N(0;1)$

a) On a $P(X \geq 40) \cong P(Y \geq 39{,}5) = P\left(Z \geq \frac{39{,}5-50}{5}\right)$

$= P(Z \geq -2{,}1) = P(Z \leq 2{,}1)$

$= 0{,}9821$



b) On a $P(40 \leq X \leq 60) \cong P(39{,}5 \leq Y \leq 60{,}5)$

$= P\left(\frac{39{,}5-50}{5} \leq Z \leq \frac{60{,}5-50}{5}\right) = P(-2{,}1 \leq Z \leq 2{,}1)$

$= 2 \cdot 0{,}9821 - 1 = 0{,}9642$

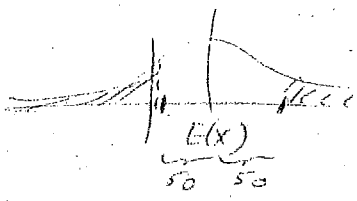
ex 48

X = "nbre de 6" $\Rightarrow$ $E(X) = n \cdot \frac{1}{6}$

$X \sim B(n, \frac{1}{6})$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{5n}$

a) $n = 6000$: $\sigma(X) \cong 28{,}87$ $\quad E(X) \cong 1000$

$P(\text{"}X \geq E(X)+50\text{" ou "}X \leq E(X)-50\text{"})$



$= 1 - P(E(X)-50 \leq X \leq E(X)+50)$

$= 1 - P(950 < X < 1050)$

On pose $Y \sim N(1000; 28{,}87)$ et $Z = \frac{Y-1000}{28{,}87} \sim N(0;1)$

$= 1 - P(949{,}5 < Y < 1050{,}5)$

$= 1 - P\left(\frac{949{,}5-1000}{28{,}87} < Z < \frac{1050{,}5-1000}{28{,}87}\right)$

$= 1 - P(-1{,}749 < Z < 1{,}749)$

$= 1 - [2P(Z < 1{,}749) - 1] = 2 - 2 \cdot 0{,}9599 = 0{,}0802$

b) idem :

$= \dots = 1 - P\left(\frac{9949{,}5-10000}{91{,}29} < Z < \frac{10050{,}5-10000}{91{,}29}\right)$

$= 1 - P(-0{,}553 < Z < +0{,}553)$

$= 1 - (2 \cdot 0{,}7088 - 1) = 0{,}5824$

ex 45

Une pièce est lancée 500 fois. Quelle est la probabilité pour que le nombre de faces ne diffère de 250 que de (*a*) plus de 10, (*b*) plus de 30 ?

$$\mu = np = (500)\left(\frac{1}{2}\right) = 250 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(500)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 11{,}1$$

(*a*) Nous cherchons la probabilité pour que le nombre de faces soit compris entre et 260 ou, les données étant considérées comme continues, entre 239,5 et 260,5.

239,5 en unités réduites = (239,5 − 250)/11,18 = − 0,94 260,5 en unit éduites = 0,94

Probabilité cherchée = (aire sous la courbe normale entre $z = -0{,}94$ et z 0,94)

= (2 fois l'aire entre $z = 0$ et $z = 0{,}94$) = 2(0,326 = 0,6528

(*b*) Nous cherchons la probabilité pour que le nombre de faces soit compris en. 220 et 280 ou, si les données sont prises continues, entre 219,5 et 280,5.

219,5 en unités réduites = (219,5 − 250)/11,18 = − 2,73 280,5 en unités réduites = 2,73

Un raisonnement suivi d'un calcul analogue à celui du cas précédent conduit à

Probabilité cherchée = 2(0,4968) = 0,9936

Il en résulte que nous pouvons être raisonnablement sûrs que le nombre de faces ne différera pas du nombre espéré (250) de plus de 30. Et, s'il arrivait que le nombre *effectif* de faces soit de 280, nous aurions une quasi certitude que la pièce utilisée était *truquée*.

ex46

Un dé est jeté 120 fois. Quelle est la probabilité pour que le résultat 4 apparaisse (*a*) 18 fois ou moins et (*b*) 14 fois ou moins ?

Le résultat 4 a pour probabilité $p = 1/6$ de se réaliser et $q = 5/6$ de ne pas être réalisé.

(*a*) Nous désirons que la probabilité d'obtenir le résultat 4 soit comprise entre 0 et 18. Ce qui est donné très exactement par

$$\binom{120}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{102} + \binom{120}{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{17}\left(\frac{5}{6}\right)^{103} + \cdots + \binom{120}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{120}$$

pour le calcul de ce résultat nous allons utiliser l'approximation normale car il y aurait bien trop de travail si on voulait le faire directement.

Considérons, donc, les données comme continues ; il en résulte que l'intervalle 0,18 peut être traité comme − 0,5 à 18,5 et,

$$\mu = np = 120\left(\frac{1}{6}\right) = 20 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} = 4{,}08$$

Alors,

− 0,5 en unités réduites = (− 0,5 − 20)/4,08 = − 5,02 18,5 en unités réduites = − 0,37

la probabilité cherchée = (aire sous la courbe normale entre $z = -5{,}02$ et $z = -0{,}37$)

= (aire entre $z = 0$ et $z = -5{,}02$)

− (aire entre $z = 0$ et $z = -0{,}37$)

= 0,5 − 0,1443 = 0,3557

(*b*) On opère comme en (*a*) mais en remplaçant 18 par 14. D'où

− 0,5 en unités réduites = − 5,02 14,5 en unités réduites = (14,5 − 20)/4,08 = 1,35

la probabilité cherchée = (aire entre $z = -5{,}02$ et $z = -1{,}35$)

= (aire entre $z = 0$ et $z = -5{,}02$)

− (aire entre $z = 0$ et $z = -1{,}35$)

= 0,5 − 0,4115 = 0,0885

Il en résulte que si nous répétons des séries de 120 essais, nous devrions retourner un 4 quatorze fois ou moins sur environ un dixième de ces séries.

ex 47

$X \sim B(400; \frac{1}{2})$, $E(X) = 200$ et $\sigma(X) = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$

Posons $Y \sim N(200; 10)$ et $Z = \frac{Y-200}{10} \sim N(0;1)$

a) $P(200-a \leq X \leq 200+a) \cong P(200-a-0{,}5 \leq Y \leq 200+a+0{,}5)$

$= P\left(\frac{200-a-0{,}5-200}{10} \leq Z \leq \frac{200+a+0{,}5-200}{10}\right)$

$= P\left(-\left(\frac{a+0{,}5}{10}\right) \leq Z \leq \frac{a+0{,}5}{10}\right)$

Si on pose $u = \frac{a+0{,}5}{10}$, on veut : $P(-u \leq Z \leq u) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 2\,P(0 \leq Z \leq u) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 2\left[P(Z \leq u) - \frac{1}{2}\right] = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 2P(Z \leq u) - 1 = 0{,}9 \Leftrightarrow P(Z \leq u) \leq 0{,}95$

$\Leftrightarrow$ (table) : $u = 1{,}645 = \frac{a+0{,}5}{10}$

d'où $a = 15{,}95$

on obtient : $184{,}05 \leq X \leq 215{,}95$

(b) idem : $a = 19{,}1$ (c) idem ; $a = 25{,}3$ (d) idem : $a = 32{,}4$ (e) idem : $a = 38{,}4$

$180{,}9 < X \leq 219{,}1$ $174{,}7 \leq X \leq 225{,}3$ $167{,}6 \leq X \leq 232{,}4$ $161{,}6 \leq X \leq 238{,}4$

ex 50

X = "nbre de personnes qui viennent"

$X \sim B(n; 0{,}8)$

$E(X) = 0{,}8n$ $\sigma(X) = \sqrt{0{,}16n} = 0{,}4\sqrt{n}$

Posons $Y \sim N(0{,}8n; 0{,}4\sqrt{n})$ et $Z = \frac{Y-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}} \sim N(0;1)$

$P(X \leq 192) \cong P(Y \leq 192{,}5) = P\left(Z \leq \frac{192{,}5-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)$

On veut $P(X \leq 192) \geq 0{,}9772$ $(= 1-0{,}0228)$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{192{,}5-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}9772$

$\Leftrightarrow \frac{192{,}5-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}} \geq 2 \Leftrightarrow 192{,}5 - 0{,}8n \geq 0{,}8\sqrt{n}$ (*)

On élève au carré : $37056{,}25 - 308{,}64n \geq 0{,}64n^2$

(il faudra vérifier les solutions !)

Résolvons : $0{,}64n^2 - 308{,}64n + 37056{,}25 = 0$

$\Delta \cong 894{,}65$

$n_1 \cong 256{,}64$ $n_2 \cong 225{,}6$

On vérifie dans (*) : n_1 pas ok ! n_2 ok

ex50

a) $X \sim B(327; 0{,}95)$ approximée par $Y \sim N(327 \cdot 0{,}95; \sqrt{327 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05})$
$\approx N(310{,}65 ; 3{,}94)$

$$P(X \leq 320) \cong P(Y \leq 320{,}5)$$
$$\cong P\left(\frac{Y - 310{,}65}{3{,}94} \leq \frac{320{,}5 - 310{,}65}{3{,}94}\right)$$
$$\cong P(Z \leq 2{,}5) \quad \text{où } Z = \frac{Y - 310{,}65}{3{,}94} \sim N(0;1)$$
$$\cong 99{,}38\ \%$$

b) La compagnie ne prend qu'un risque de moins de 1%

c) Même calcul pour $n = 330$: $p \cong 0{,}95$
$n = 335$: $p \cong 0{,}67$ le risque augmente fortement !

d) Il s'agit maintenant d'une probabilité conditionnelle.

$$p = P(X \leq 320 \mid X \geq 310) = \frac{P(310 \leq X \leq 320)}{P(X \geq 310)}$$

on a : $P(310 \leq X \leq 320)$
$$\cong P(309{,}5 \leq Y \leq 320{,}5)$$
$$= P\left(\frac{309{,}5 - 337 \cdot 0{,}95}{\sqrt{337 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \leq Z \leq \frac{320{,}5 - 337 \cdot 0{,}95}{\sqrt{337 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}}\right)$$
$$= P(-2{,}6619 \leq Z \leq 0{,}0875)$$
$$= P(Z \leq 0{,}0875) - [1 - P(Z \leq 2{,}6619)]$$
$$\cong 0{,}533 - [1 - 0{,}996] \cong 0{,}529$$

et $P(X \geq 310) \cong P(Y \geq 309{,}5) \cong P\left(Z \geq \frac{309{,}5 - 337 \cdot 0{,}95}{\sqrt{337 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}}\right)$
$$\cong P(Z \geq -2{,}6619) = P(Z \leq 2{,}6619) \cong 0{,}996$$

Enfin : $p \cong \frac{0{,}529}{0{,}996} \cong 53{,}1\ \%$