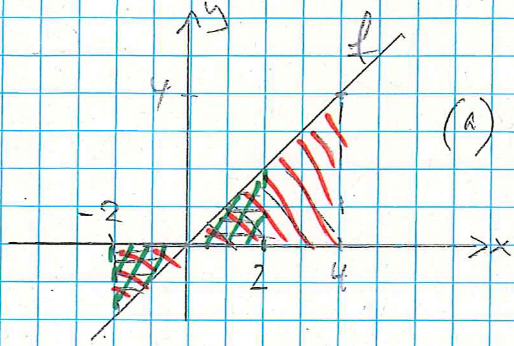
MA4N Ch1 Intégration Corrigé des exercices

ex1

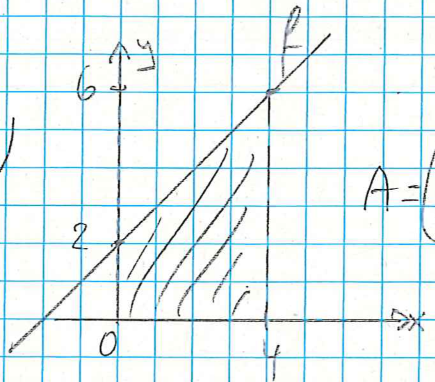


(a) $A = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$

(b) $A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$

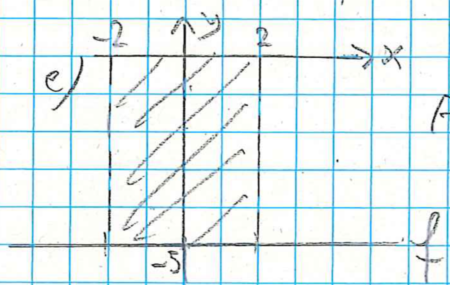
(c) $A = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 10$

d)



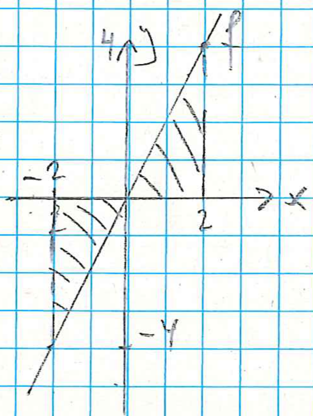
$A = \left(\frac{6+2}{2}\right) \cdot 4 = 16$ (trapèze)

e)



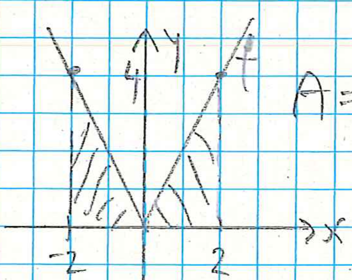
$A = 4 \cdot 5 = 20$ (rectangle)

f)



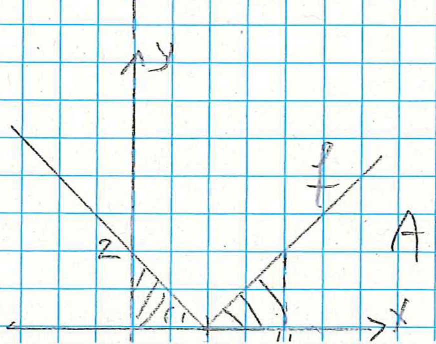
$A = \left(\frac{2 \cdot 4}{2}\right) \cdot 2 = 8$

g)



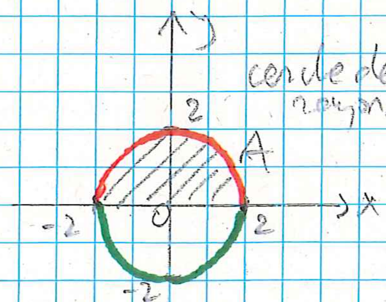
$A = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 4}{2}\right) = 8$

h)



$A = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{2}\right) = 4$

i)



cercle de rayon 2 et de centre $(0;0)$

$y = \pm\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 4-x^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4$

A correspond à l'aire sous la courbe rouge $y=\sqrt{4-x^2}$

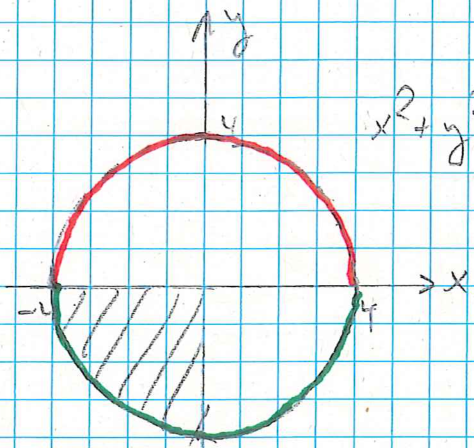
$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 2\pi$

La fonction définie par $y=+\sqrt{4-x^2}$ est représentée graphiquement par la courbe rouge ;

- - - - - - - $y=-\sqrt{4-x^2}$

- - - - - - - - - - - verte.

j)

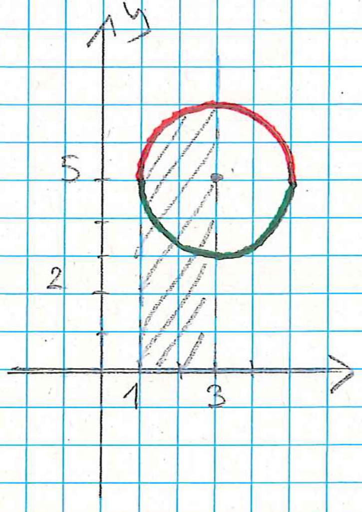


$x^2+y^2=16$ éq. du cercle de rayon 4 et de centre $(0;0)$

$y = \pm\sqrt{16-x^2}$

$A = \frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 = 4\pi$

k)



$y = \pm\sqrt{4-(x-3)^2}+5 \Leftrightarrow y-5 = \pm\sqrt{4-(x-3)^2}$

$\Leftrightarrow (y-5)^2 = 4-(x-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2 = 4 = 2^2$

éq. du cercle de centre $(3;5)$ et de rayon 2

⚠ on cherche l'aire sous la courbe rouge :

$$A = \underbrace{\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2}_{\frac{1}{4}\text{ de cercle}} + \underbrace{2\cdot 5}_{\text{rectangle}} = \pi + 10$$

ex 2

a) $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5$

d) $\sum_{i=0}^{6} (-1)^i i = 0-1+2-3+4-5+6$

b) $\sum_{i=7}^{12} i = 7+8+9+10+11+12$

e) $\sum_{i=1}^{7} (-1)^{i+1}(2i) = 2-4+6-8+10-12+14$

c) $\sum_{i=4}^{10} \frac{1}{i} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{10}$

f) $\sum_{i=3}^{8} i^2 = 9+16+25+36+49+64$

ex 3

a) $\sum_{i=1}^{100} i$

c) $\sum_{i=6}^{500} 2i$

e) $\sum_{i=1}^{13} (-1)^i i^2$

b) $\sum_{i=7}^{999999} i$

d) $\sum_{i=0}^{24} (2i+1)$ ou $\sum_{i=1}^{25} (2i-1)$

f) $\sum_{i=1}^{21} (-1)^{i+1} \cdot 3i$

ex 4

a) $\sum_{i=0}^{6} f(x_i) = f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_6)$

b) $\sum_{i=11}^{16} f_i(x) = f_{11}(x)+f_{12}(x)+f_{13}(x)+\dots+f_{16}(x)$

c) $\sum_{i=1}^{5} i f(x_i) = f(x_1)+2f(x_2)+3f(x_3)+4f(x_4)+5f(x_5)$

ex 5

a) $\sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot a_i$

b) $\sum_{i=1}^{3} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

ex 6

(TI30XPro)

a) MATH → 5: Sum → 1 ▷ 100 ▷ 2 x $\frac{yzt}{abcd}$ → Enter : 10100

b) MATH → 5: sum → 32 ▷ 100 ▷ 2 x + 1 Enter : 9177

Ch 1 Ma 4

Ex 7

(a)

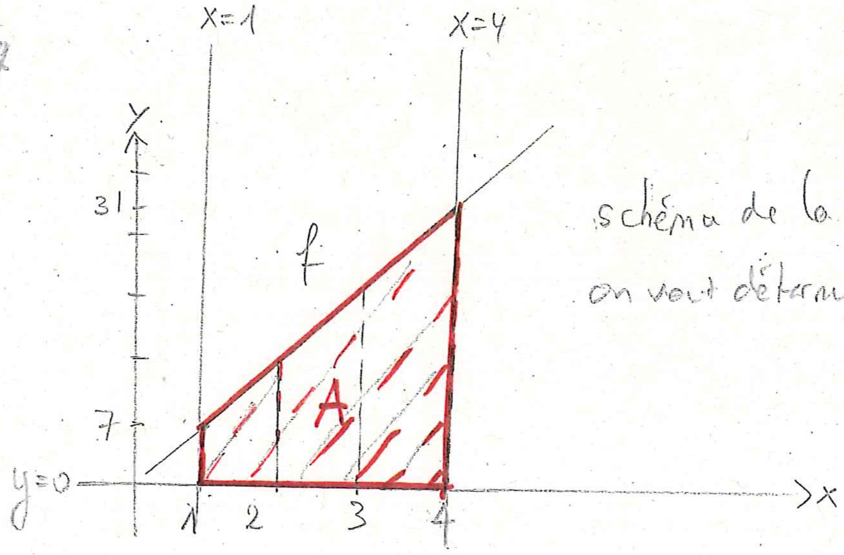


schéma de la situation :
on veut déterminer l'aire **A**

1°/ on découpe l'intervalle $[1;4]$ en 4 intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

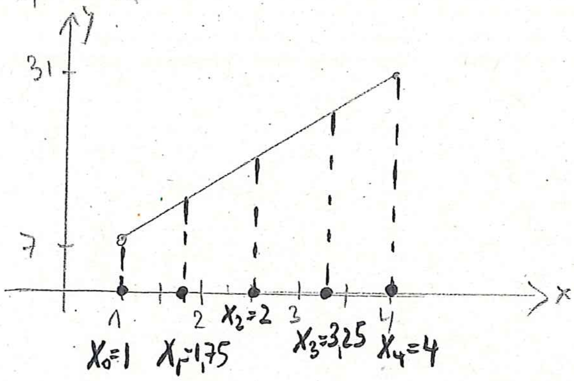
$x_0 = 1$

$x_1 = 1 + \Delta x = 1{,}75$

$x_2 = 1 + 2 \cdot \Delta x = 2{,}5$

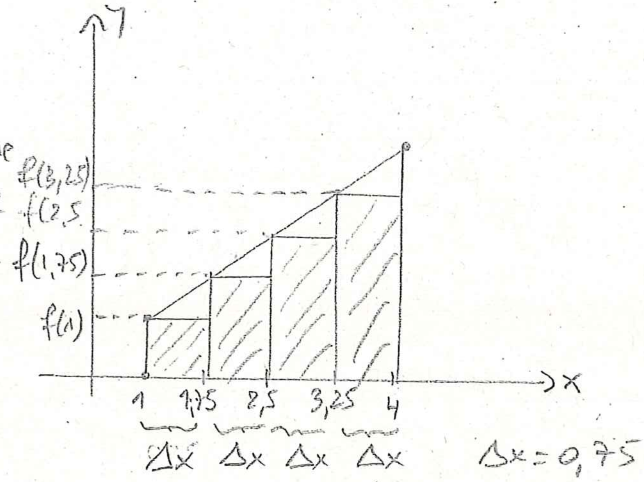
$x_3 = 1 + 3 \cdot \Delta x = 3{,}25$

$x_4 = 1 + 4 \cdot \Delta x = 4$



2°/ petites sommes :

on choisit des rectangles de telle sorte que la somme de leurs aires soit inférieure à l'aire cherchée



la somme de leurs aire vaut :

$0{,}75 \cdot f(1) + 0{,}75 \cdot f(1{,}75) + 0{,}75 \cdot f(2{,}5) + 0{,}75\, f(3{,}25)$

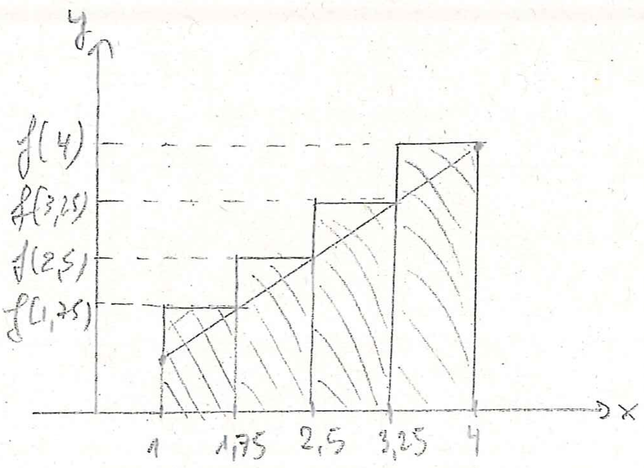
$= 0{,}75\left(f(1) + f(1{,}75) + f(2{,}5) + f(3{,}25) \right)$

$= 0{,}75\left[(8 \cdot 1 - 1) + (8 \cdot 1{,}75 - 1) + (8 \cdot 2{,}5 - 1) + (8 \cdot 3{,}25 - 1) \right]$

$= \dots = 48$

grandes sommes:

on choisit des rectangles de telle sorte que la somme de leurs aires soit supérieure à l'aire cherchée



la somme de leurs aires vaut:

$0{,}75 \cdot f(1{,}75) + 0{,}75\, f(2{,}5) + 0{,}75 \cdot f(3{,}25) + 0{,}75\, f(4)$

$= 0{,}75 \cdot \left(f(1{,}75) + f(2{,}5) + f(3{,}25) + f(4) \right)$

$= 0{,}75 \cdot \left[(8 \cdot 1{,}75 - 1) + (8 \cdot 2{,}5 - 1) + (8 \cdot 3{,}25 - 1) + (8 \cdot 4 - 1) \right]$

$= \ldots = 66$

On en déduit une approximation de A par valeurs inférieure et supérieure:

$$48 \leq A \leq 66$$

Remarque: dans ce cas très particulier, on peut déterminer géométriquement A via l'aire du trapèze:

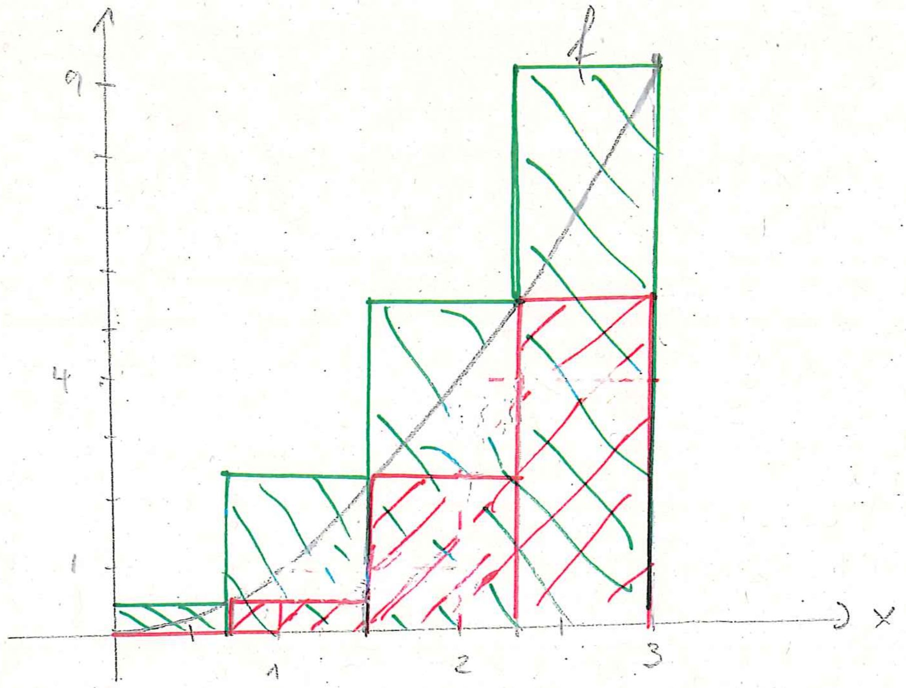
$$A = \left(\frac{31+7}{2}\right) \cdot 3 = 19 \cdot 3 = 57$$

On a bien $48 \leq 57 \leq 66$!

Ch 1

Ex 7

(b)



on découpe $[0;3]$ en 4 parties égales : $\Delta x = \frac{3-0}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$x_0 = 0$
$x_1 = 0 + \Delta x = 0{,}75$
$x_2 = 0 + 2\Delta x = 1{,}5$
$x_3 = 0 + 3\Delta x = 2{,}25$
$x_4 = 0 + 4\Delta x = 3$

petites sommes $s_4 = 0{,}75 \cdot f(0) + 0{,}75\, f(0{,}75) + 0{,}75\, f(1{,}5) + 0{,}75\, f(2{,}25)$
$= 0{,}75 \cdot [0^2 + 0{,}75^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2] = \ldots \cong 5{,}9$

grandes sommes $S_4 = 0{,}75\, f(0{,}75) + 0{,}75 \cdot f(1{,}5) + 0{,}75\, f(2{,}25) + 0{,}75\, f(3)$
$= 0{,}75 \cdot [0{,}75^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2 + 3^2] = \ldots \cong 12{,}7$

On en déduit une approximation de l'aire cherchée par valeurs inférieure et supérieure :

$5{,}9 \leq A \leq 12{,}7$

Ch 1

Ex 8

Partage en 8 sous-intervalles égaux :

$\Delta x = \frac{3}{8}$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0 + 1\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$; $x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$; ... ; $x_8 = 0 + 8 \cdot \frac{3}{8} = 3$

petites sommes $s_8 = \Delta x f(x_0) + \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_7)$

$= \Delta x \left[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_7) \right]$

$= \frac{3}{8} \left[0^2 + \left(1 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + \dots + \left(7 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 \right]$

$= \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2 \right] \cong 7{,}4$

avec la calculatrice, il faut calculer $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \sum_{i=0}^{7} i^2$

$(\to 3 \to \frac{\square}{\square} \to 8 \triangleright) \to x^{\square} \to 3 \triangleright \times \to$

math $\to 5 \to 0 \triangleright 7 \triangleright x^{yzt}_{abcd}$ $x^2 \to$ Enter

résultat : $\frac{345}{128}$ $\triangleleft\triangleright \approx 7{,}38$

grandes sommes : idem pour obtenir en décalant

$S_8 = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left[1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 \right] \cong 10{,}8$

d'où $7{,}38 \leq A \leq 10{,}8$

(ii) partage en 16 sous-intervalles :

$\Delta x = \frac{3}{16}$

$x_0 = 0$; $x_1 = 1 \cdot \frac{3}{16}$; $x_2 = 2 \cdot \frac{3}{16}$; $x_3 = 3 \cdot \frac{3}{16}$; ... ; $x_{16} = 16 \cdot \frac{3}{16} = 3$

petites sommes $s_{16} = \dots = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left[0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 15^2 \right] \cong 8{,}2$

grandes sommes $S_{16} = \dots = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 16^2 \right] \cong 9{,}9$

Corrigé

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=0$ et $x=3$.

On considère donc maintenant l'intervalle [0;3].

On partage $[0;3]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{3}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{3}{n}$

On pose :

$$x_0=0$$

$$x_1=0+\Delta x=\frac{3}{n}$$

$$x_2=0+2\Delta x=2\cdot\frac{3}{n}$$

$$x_3=0+3\Delta x=3\cdot\frac{3}{n}$$

...

$$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{3}{n}$$

$$x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{3}{n}=3$$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x f(x_1)+\Delta x f(x_2)+\Delta x f(x_3)+\ldots+\Delta x f(x_n)\\
&= \frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f(n\cdot\frac{3}{n})\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^2+\frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^2+\frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{3}{n}(n\cdot\frac{3}{n})^2\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{27}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x f(x_0)+\Delta x f(x_1)+\Delta x f(x_2)+\ldots+\Delta x f(x_{n-1})\\
&= \frac{3}{n}f(0)+\frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f((n-1)\cdot\frac{3}{n})
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{n}(0)^2+\frac{3}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\frac{3}{n}\left(2\cdot\frac{3}{n}\right)^2+\frac{3}{n}\left(3\cdot\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{3}{n}\left((n-1)\cdot\frac{3}{n}\right)^2$$

$$= \frac{3}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{27}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{27}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant A \leqslant S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{27n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{27(2n^3+3n^2+n)}{6n^3} = \frac{2\cdot 27}{6} = 9$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{27(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{27(2n^3-3n^2+n)}{6n^3} = \frac{2\cdot 27}{6} = 9$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire $9 \leqslant A \leqslant 9$, donc $A=9$

On dit que ***f* est intégrable** sur [0;3] (au sens de Riemann)
et on note $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=9$ ou $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x=9$

Corrigé

a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$.

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=0$ et $x=1$:

On partage $[0;1]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{n}$

On pose : $x_0=0$, $x_1=0+\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_2=0+2\Delta x=\frac{2}{n}$, ... ,

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=\frac{n-1}{n}$, $x_n=0+n\Delta x=\frac{n}{n}=1$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(\frac{2}{n})+\frac{1}{n}f(\frac{3}{n})+\ldots+\frac{1}{n}f(\frac{n}{n})\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^3+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^3+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^3+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n}{n})^3\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)\\
&= \frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)
\end{aligned}$$

on utlilise la formule donnée : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On obtient alors:

$$S_n=\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

d'où : $$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1})\\
&= \frac{1}{n}(0)^3+\frac{1}{n}(\frac{1}{n})^3+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^3+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^3+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^3\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^3\left(0^2+1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4}=\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$

et donc: $s_n = \frac{1}{n^4}\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)=\frac{1}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}=\frac{(n-1)^2}{4n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n+1}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{1}{4}\leqslant A\leqslant\frac{1}{4}$, donc $A=\frac{1}{4}$ ou $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

b) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$.

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites x=0 et x=3.

On considère donc maintenant l'intervalle [0;3].

On partage [0;3].en n intervalles équidistants de longueur $\frac{3-0}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{3}{n}$

On pose : $x_0=0$,, $x_1=\Delta x=\frac{3}{n}$, $x_2=2\Delta x=2\cdot\frac{3}{n}$; $x_3=3\Delta x=3\cdot\frac{3}{n}$,...,

$x_{n-1}=(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{3}{n}$, $x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{3}{n}=3$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f(n\cdot\frac{3}{n})\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3+\frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^3+\frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^3+\ldots+\frac{3}{n}(n\cdot\frac{3}{n})^3\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)\\
&= \frac{81}{n^4}\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{81n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{81(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{81(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{81(n^2+2n+1)}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{81n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{81(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4}=\frac{81}{4}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$s_n = \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1})$$

$$= \frac{3}{n}f(0)+\frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f((n-1)\cdot\frac{3}{n})$$

$$= \frac{3}{n}(0)^3+\frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3+\frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^3+\frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^3+\ldots+\frac{3}{n}((n-1)\cdot\frac{3}{n})^3$$

$$= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)$$

$$= \frac{81}{n^4}\left(0^3+1^3+\ldots+(n-1)^3\right)$$

$$= \frac{81(n-1)^2n^2}{4n^4}=\frac{81(n-1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{81(n-1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{81(n^2-2n+1)}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{81n^2(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{81(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4}=\frac{81}{4}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n\leqslant A\leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{81}{4}\leqslant A\leqslant\frac{81}{4}$, donc $A=\frac{81}{4}$ ou $\int_0^3 x^3\,dx=\frac{81}{4}$

c) Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $b>0$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=0$ et $x=b$.

On considère donc maintenant l'intervalle $[0;b]$.

On partage $[0;b]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{b}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{b}{n}$

On pose : $x_0=0$, $x_1=0+\Delta x=\frac{b}{n}$, $x_2=0+2\Delta x=2\cdot\frac{b}{n}$,...,

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{b}{n}$, $x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{b}{n}=b$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{b}{n}f\left(\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)+\ldots+\frac{b}{n}f\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)\\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\ldots+\frac{b}{n}\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^3\\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)\\
&= \frac{b^4}{n^4}\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors:

$$S_n=\frac{b^4}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)=\frac{b^4n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\text{d'où : } \lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4(n^2+2n+1)}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{4}=\frac{b^4}{4}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1})\\
&= \frac{b}{n}f(0)+\frac{b}{n}f\left(\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)+\ldots+\frac{b}{n}f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\\
&= \frac{b}{n}(0)^3+\frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\ldots+\frac{b}{n}\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^3\\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\left(0^3+1^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)$$

On obtient alors:

$$s_n = \frac{b^4(n-1)^2 n^2}{4n^4} = \frac{b^4(n-1)^2}{4n^2}$$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^4(n-1)^2}{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^4(n^2-2n+1)}{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^4 n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot 4}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b^4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{4} = \frac{b^4}{4}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{b^4}{4} \leqslant A \leqslant \frac{b^4}{4}$, donc $A=\frac{b^4}{4}$ ou $\int_0^b x^3 \mathrm{d}x = \frac{b^4}{4}$

d) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $0\leq a\leq b$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$.

En utilisant les résultats précédents, on a que : $\int_a^b x^3 \mathrm{d}x = \int_0^b x^3 \mathrm{d}x - \int_0^a x^3 \mathrm{d}x = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$

e) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $a\leq b\leq 0$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$.

Par symétrie de la fonction, on a dans ce cas : $\int_a^b x^3 \mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} x^3 \mathrm{d}x$ où $0\leq -b\leq -a$

En utilisant les résultats précédents, on a que :

$$\int_a^b x^3 \mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} x^3 \mathrm{d}x = -\left(\int_0^{-a} x^3 \mathrm{d}x - \int_0^{-b} x^3 \mathrm{d}x\right) = -\left(\frac{(-a)^4}{4} - \frac{(-b)^4}{4}\right) = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

f)Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $a\leq 0\leq b$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$.

On a dans ce cas : $\int_a^b x^3 \mathrm{d}x = \int_a^0 x^3 \mathrm{d}x + \int_0^b x^3 \mathrm{d}x$ et on peut utiliser les cas précédents :

$$\int_a^b x^3 \mathrm{d}x = \int_a^0 x^3 \mathrm{d}x + \int_0^b x^3 \mathrm{d}x = \frac{0^4}{4} - \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

CONCLUSION : $\int_a^b x^3 \mathrm{d}x = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$ pour tous les choix possibles de $a\leq b$

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant A \leqslant S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{27n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{27(2n^3+3n^2+n)}{6n^3} = \frac{2\cdot 27}{6} = 9$$

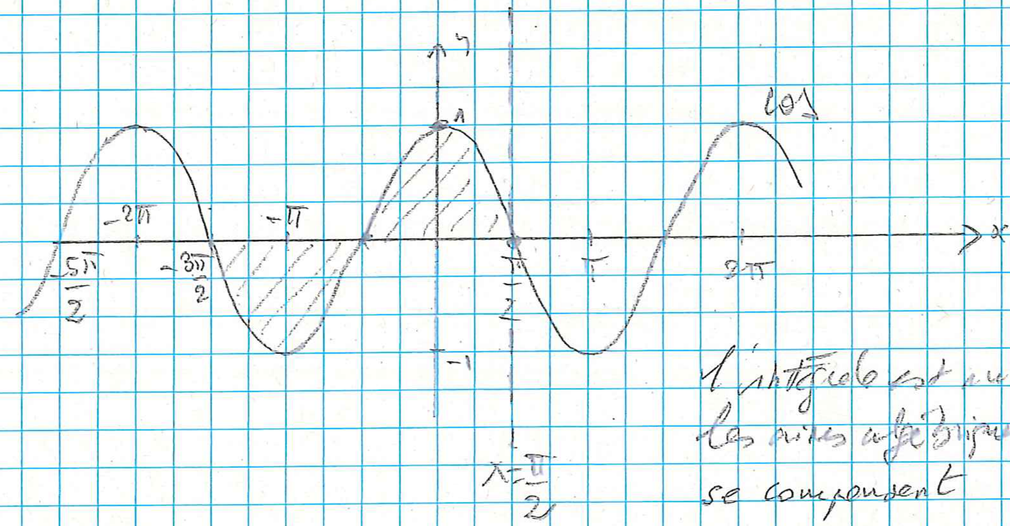
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{27(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{27(2n^3-3n^2+n)}{6n^3} = \frac{2\cdot 27}{6} = 9$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire $9 \leqslant A \leqslant 9$, donc $A=9$

On dit que ***f* est intégrable** sur [0;3] (au sens de Riemann)

et on note $\int_0^3 f(x)\,dx = 9$ ou $\int_0^3 x^2\,dx = 9$

ex12



l'intégrale est nulle donc les aires algébriques >0 et <0 se compensent

$a = -\frac{3\pi}{2}$, ou $a = -\frac{7\pi}{2}$ ou ...

ex13

cf ex1 :

a) $I = A = 8$

b) $I = 0$

c) $I = \int_2^4 f(x)\,dx = \left(\frac{4+2}{2}\right)\cdot 2 = 6$ (aire d'un trapèze)

d) $I = A = 16$

e) $I = -A = -20$

f) $A = 0$

g) $I = A = 8$

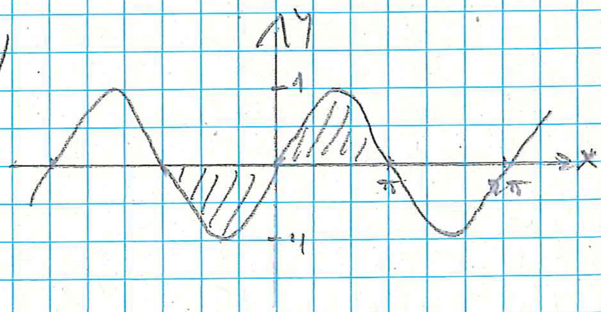
h) $I = A = 4$

i) $I = A = 2\pi$

j) $I = -A = -4\pi$

k) $I = A = \pi + 10$

l)



$I = 0$

ex 14 a) $\frac{3x}{x-1}\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{3\cdot 2}{2-1}\right) - \left(\frac{3(-1)}{(-1)-1}\right) = 6 - \left(\frac{-3}{-2}\right) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

b) $\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

c) $\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

ex 15 a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0$ b) $\int_{2\pi}^{0} \sin(x)\,dx = -\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(x)\,dx}_{=0} = 0$

c) $\int_2^0 x^2\,dx = -\int_0^2 x^2\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = -\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = -\frac{8}{3}$

d) $\int_{-2}^{-4} x^2\,dx = -\int_{-4}^{-2} x^2\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{-2}\right) = -\left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-4)^3}{3}\right) = -\frac{56}{3}$

ex 16 a) $\int_2^3 (x^3+x)\,dx \overset{Pr\,I_3}{=} \int_2^3 x^3\,dx + \int_2^3 x\,dx \overset{I_0+I_4}{=} \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^3$

$= \left(\frac{81}{4}-\frac{16}{4}\right) + \left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{65}{4} + \frac{5}{2} = \frac{75}{4}$

b) $\int_{-2}^1 (-3x-1)\,dx \overset{Pr\,I_4}{=} \int_{-2}^1 -3x\,dx - \int_{-2}^1 1\,dx \overset{Pr\,I_2}{=} -3\int_{-2}^1 x\,dx - \int_{-2}^1 1\,dx$

$\overset{I_1+I_2}{=} -3\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^1\right) - x\Big|_{-2}^1 = -3\left(\frac12 - \frac42\right) - (1-(-2)) = \frac92 - 3 = \frac32$

c) $\int_{-2}^1 \frac{2x^3-x^2+3x}{5}\,dx \overset{Pr\,I_2}{=} \frac15\int_{-2}^1(2x^3-x^2+3x)\,dx \overset{Pr\,I_3 I_4}{=} \frac15\left[\int_{-2}^1 2x^3\,dx - \int_{-2}^1 x^2\,dx + \int_{-2}^1 3x\,dx\right]$

$\overset{Pr\,I_2}{=} \frac15\left[2\int_{-2}^1 x^3\,dx - \int_{-2}^1 x^2\,dx + 3\int_{-2}^1 x\,dx\right] \overset{I_0 I_3 I_4}{=} \frac15\left[2\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^1\right) - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^1 + 3\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^1\right]$

$= \frac15\left[2\left(\frac14-\frac{16}{4}\right) - \left(\frac13 - \left(\frac{-8}{3}\right)\right) + 3\left(\frac12-\frac42\right)\right]$

$= \frac15\left[-\frac{15}{2} - \frac{7}{3} - \frac{9}{2}\right] = \frac15\left[-\frac{24}{2} - \frac{7}{3}\right] = \frac15\left[-12 - \frac{7}{3}\right]$

$= \frac15\left[-\frac{43}{3}\right] = -\frac{43}{15}$

ex 17

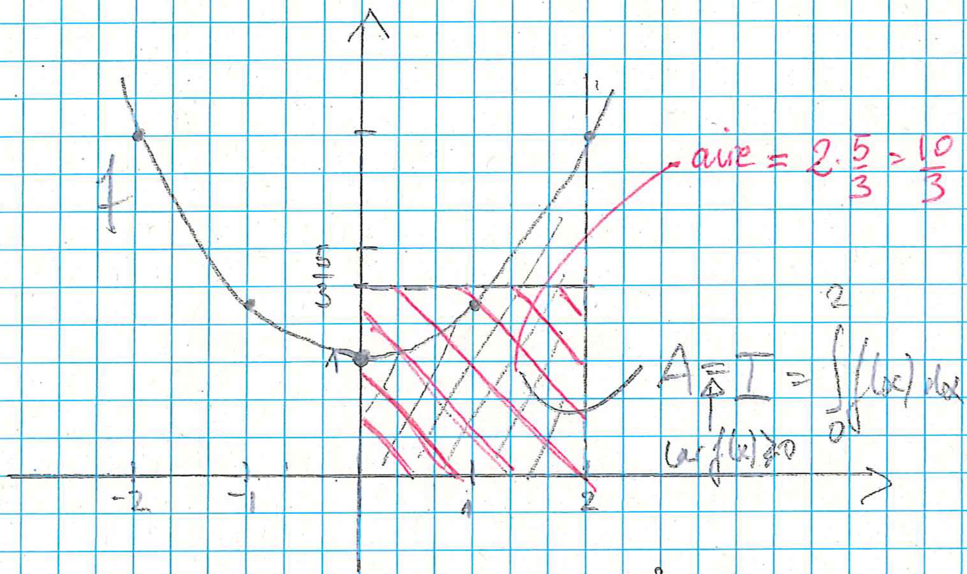
a) $I = -\int_1^5 f(x)\,dx + \int_{-3}^5 f(x)\,dx = \int_{-3}^1 f(x)\,dx$

b) $I = \int_e^d f(x)\,dx$

c) $I = \int_h^{h+c} f(t)\,dt$

d) $I = \int_c^m f(x)\,dx + \int_m^d f(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx$

ex 18



on cherche $c \in [0;2]$ tel que $\int_0^2 f(x)\,dx = f(c)(2-0)$

$\Leftrightarrow \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx = 2 f(c)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx + \int_0^2 1\,dx = 2 f(c)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[x\right]_0^2 = 2 f(c)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} + 2 = 2 f(c)$

$\Leftrightarrow \frac{10}{3} = 2 f(c) \Leftrightarrow f(c) = \frac{5}{3}$

$= \int_0^2 f(x)\,dx$

Ch1 ex19 : réponses

c) $\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + x$

b) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$

d) $x^4 - x$

e) $\frac{1}{3}(x+1)^3$ ou $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{8}(2x+1)^4$

g) $-\frac{1}{13}(2-x)^{13}$

h) $\frac{1}{24}(4x-2)^6$

i) $\frac{1}{3}(3x^2+1)^3$

j) $\frac{1}{6}(x^2-3x+1)^6$

k) $-\frac{3}{4}(1-x^2)^4$

l) $-\frac{1}{6}(1-2x)^3$

m) $x^2 + x + \frac{1}{x}$

n) $\frac{1}{1-x}$

o) $x - \frac{1}{x}$

p) $4x - \frac{2}{x} + \frac{5}{4x^4}$

q) $\frac{4}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^4}$

r) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x}$

s) $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{x}$

t) $\frac{-1}{2(1+2x^3)}$

u) $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$

v) $\frac{1}{21}(3x+2)^7$

w) $\frac{2}{3}(4x^2-5x)^3$

x) $-\frac{1}{x^2+x+3}$

y) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$

z) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

aa) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

ab) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

ac) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

ad) $2\sqrt{x^2+x+1}$

ae) $2\sqrt{9+x^3}$

af) $\frac{2}{5}\sqrt{5x^3+8}$

ag) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}$

ah) $\frac{2}{3}(x^3+x+2)\sqrt{x^3+x+2}$

ai) $\frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{2x}$

aj) $x^2 + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$

ak) $x^2 - 2\sqrt{x}$

al) $2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

am) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x}$

an) $\frac{2}{3}(x^2-5x+6)\sqrt{x^2-5x+6}$

ao) $\frac{2}{3}\sin(x)\sqrt{\sin(x)}$

ap) $-\frac{1}{3}\cos(3x)$

aq) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x)$

ar) $3\sin(x) - 2\cos(x)$

as) $\operatorname{tg}(x) - x$

at) $\frac{1}{8}\sin(4x)$

au) $\frac{1}{6}\sin^6(x)$

av) $-\frac{1}{5}\cos^5(x)$

aw) $-\frac{2}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$

ax) $\frac{1}{2}(1-\cos(x))^2$

ay) $\frac{1}{1+\cos(x)}$

az) $\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)$

ba) $\frac{-1}{8(4\sin(x)-1)^2}$

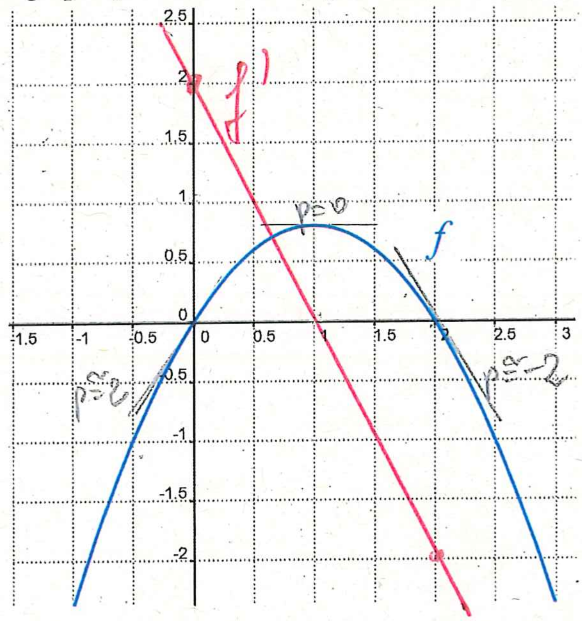
ex20 a) $\int 4x+3 \, dx = 4\int x \, dx + 3\int 1 \, dx = 4\frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + C$

b) $\int 4t+3 \, dx = (4t+3)\int 1 \, dx = (4t+3) \cdot x + C$

⚠ tout constant par rapport à x...

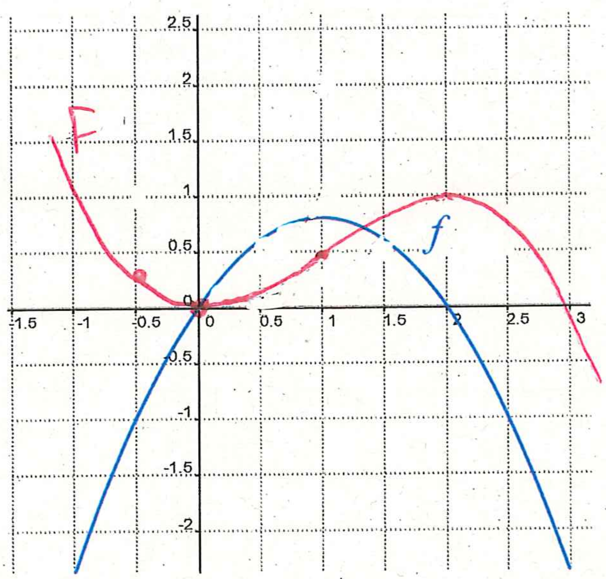
ex21 On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les trois cas. Dans les 3 cas ci-dessous, on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés.

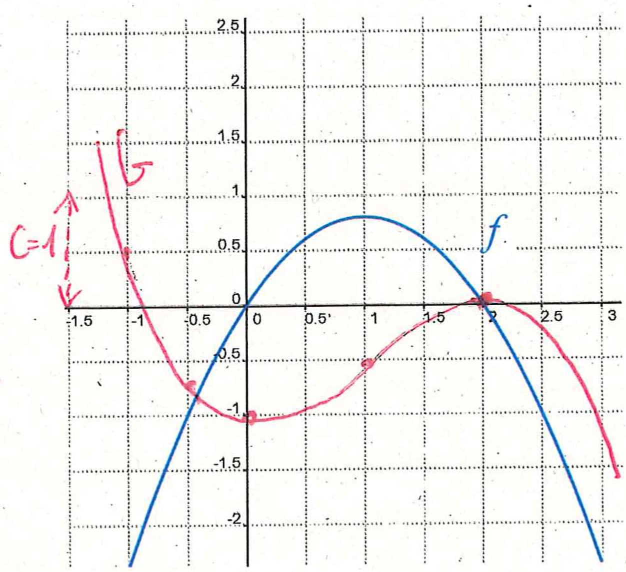
(a) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f :



(b) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$:

(c) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par $G(x)=\int_2^x f(t)\,dt$:





$F(0)=0$
$F(-0,5) \simeq \int_0^{-1,5} f(t)\,dt = -\int_{-1,5}^{0} f(t)\,dt \simeq -(-0,25)$
$F(1) \simeq 0,5$ pt d'inflexion en 1

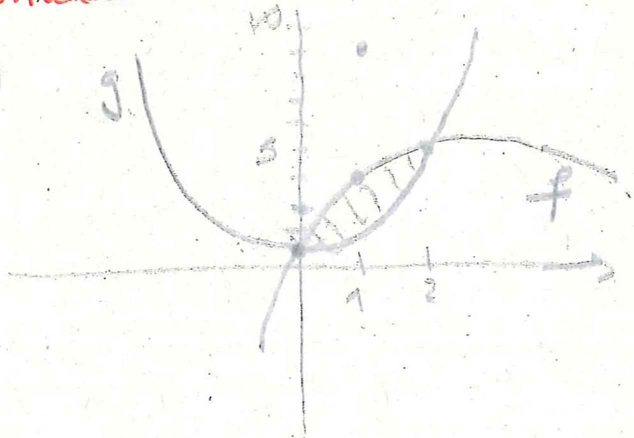
Même courbe qu'en b) translatée verticalement, en partant de $G(2)=0$
(d'où $F(x)-G(x)=1$)

ex23

a) $f(x) = -x^2+4x+1$

$g(x) = x^2+1$

① on représente la situation



$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2+4x+1 = x^2+1$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x=0$

$\Leftrightarrow 2x(x-2)=0$

$S=\{0;2\}$

② on pose le pb en termes d'intégrale

$A = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 g(x)\,dx$

③ on résoud

$= \int_0^2 f(x)-g(x)\,dx$

$= \int_0^2 (-x^2+4x+1)-(x^2+1)\,dx = \int_0^2 -2x^2+4x\,dx$

$= \left[-2\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(-2\frac{2^3}{3}+4\frac{2^2}{2}\right) - (0+0)$

$= -2\frac{8}{3}+4\cdot\frac{4}{2} = -\frac{16}{3}+8 = \frac{-16+24}{3} = 8/3$

b) $f(x) = x^3-x^2-2x+2$

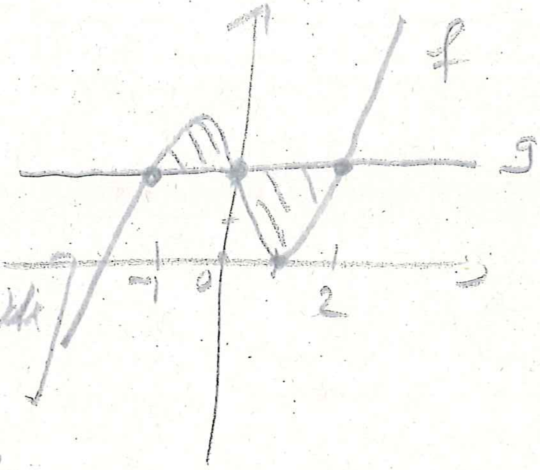
$g(x)=2$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-x^2-2x+2=2$

$\Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0$

$S=\{-1;0;2\}$



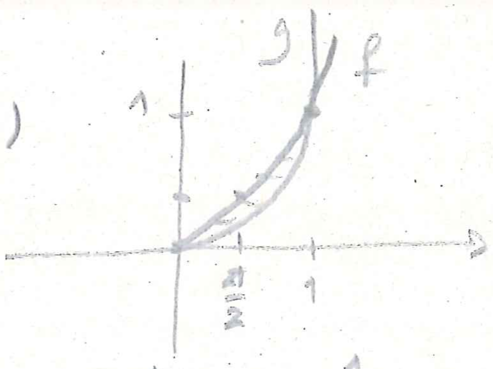
$A = \left[\int_{-1}^0 f(x)dx - \int_{-1}^0 g(x)dx\right] + \left[\int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx\right]$

$= \int_{-1}^0 f(x)-g(x)\,dx + \int_0^2 g(x)-f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx + \int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2$

$= 0-\left(+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(-\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+4\right)-0 = -\left(\frac{7}{12}-1\right)+\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{25}{12}+1 = \frac{37}{12}$

c)



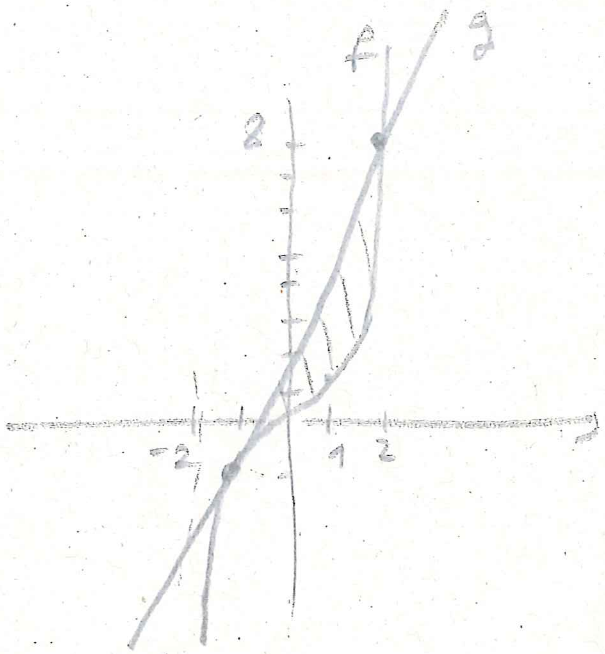
$f(x) = x^2$
$g(x) = x^3$

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 x^2 - x^3\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{12}$$

d) $f(x) = x^3$
$g(x) = 3x+2$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = 3x+2$
$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x-2) = 0$
$S = \{-1; 2\}$



$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} -x^3 + 3x + 2\,dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{2} = \left(-\frac{16}{4} + 3\cdot\frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2\right)$$

$$= 6 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1-6}{4} = 8 - \frac{5}{4} = \frac{32-5}{4} = \frac{27}{4}$$

ex24 a) $D_f = \mathbb{R}^*$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ (car $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0$

$x = \pm 1$

Points d'intersection de f et g :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = 3$ $\;\; \div 4$, $\cdot x^2$ (ok car $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4 = 3x^2$

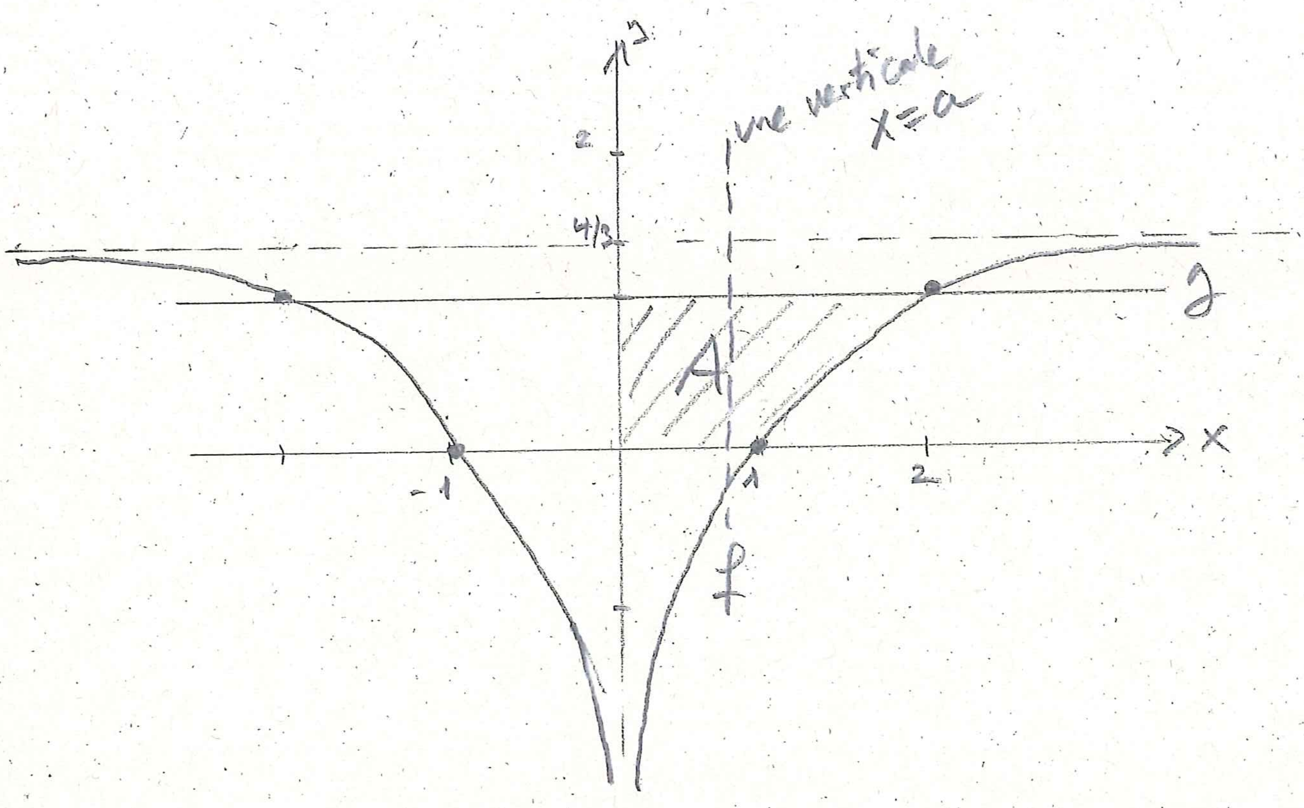
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$

$x = \pm 2$

pour $x = -2$: $y = 1 \Rightarrow I_1 = (-2; 1)$

$x = 2$: $y = 1 \Rightarrow I_2 = (2; 1)$



On veut :

$$\int_0^a g(x)\,dx = \int_a^1 g(x)\,dx + \int_1^2 g(x)-f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a 1\,dx = \int_a^1 1\,dx + \int_1^2 1-\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a 1\,dx = \int_a^1 1\,dx + \int_1^2\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow x\Big|_0^a = x\Big|_a^1 + \left[-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow a-0 = 1-a + \left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}(-1)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1 + \left[-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1 + \left[\frac{-2-2+1+4}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2a = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

La droite $x=\frac{2}{3}$ coupe la surface en 2 aires égales ex22

a) $\int 5x^2+14\,dx = 5\frac{x^3}{3}+14x = F(x)$

b) $F(x)=\frac{5x^3}{3}+14x+C \quad (C\in\mathbb{R})$

c) $F(0)=2 \Leftrightarrow \frac{5\cdot 0^3}{3}+14\cdot 0+C=2 \Leftrightarrow C=2$

$F(x)=\frac{5x^3}{3}+14x+2$ unique primitive de f telle que $F(0)=2$

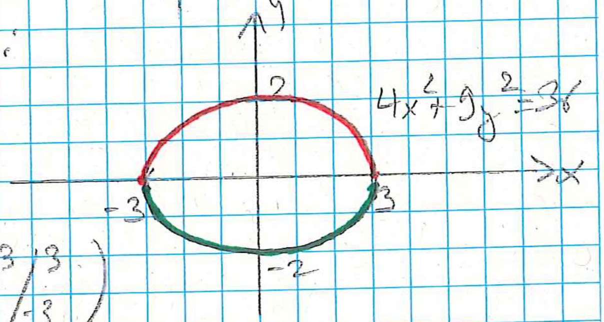
ex25

a) $V=\pi\int_0^2 2^2\,dx = 4\pi\int_0^2 1\,dx = 4\pi\, x\Big|_0^2 = 8\pi$

b) $V=\pi\int_0^5 (2x^2)^2\,dx = \pi\int_0^5 4x^4\,dx = \pi\cdot 4\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^5 = \pi\cdot 4\cdot 625 = 2500\pi$

c) $4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow 9y^2=36-4x^2 \Leftrightarrow y^2=4-\frac{4}{9}x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$

On choisit la branche supérieure de l'ellipse : $y=f(x)=+\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$ qu'on fait tourner autour de Ox entre -3 et 3 pour obtenir l'ellipsoïde :



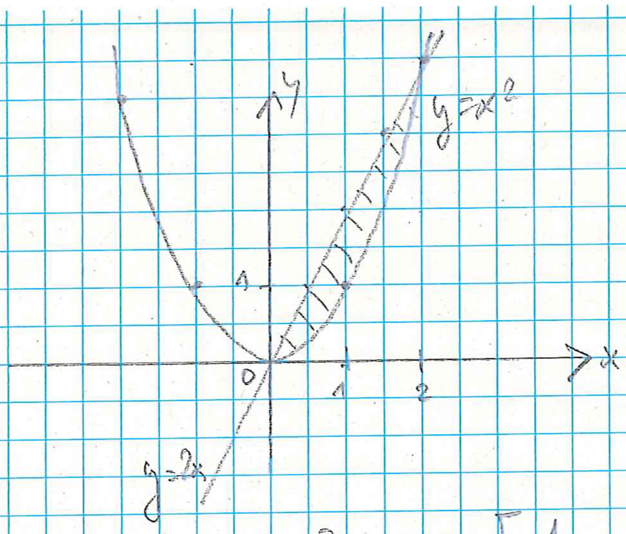
$$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}\right)^2 dx$$

$$=\pi\int_{-3}^{3} 4-\frac{4}{9}x^2\,dx = \pi\left(4x-\frac{4}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}\right)$$

$$=\pi\left(\left(12-\frac{4}{9}\cdot 9\right)-\left(-12+\frac{4}{9}\cdot 9\right)\right)=\pi(24-8)=16\pi$$

ex 26

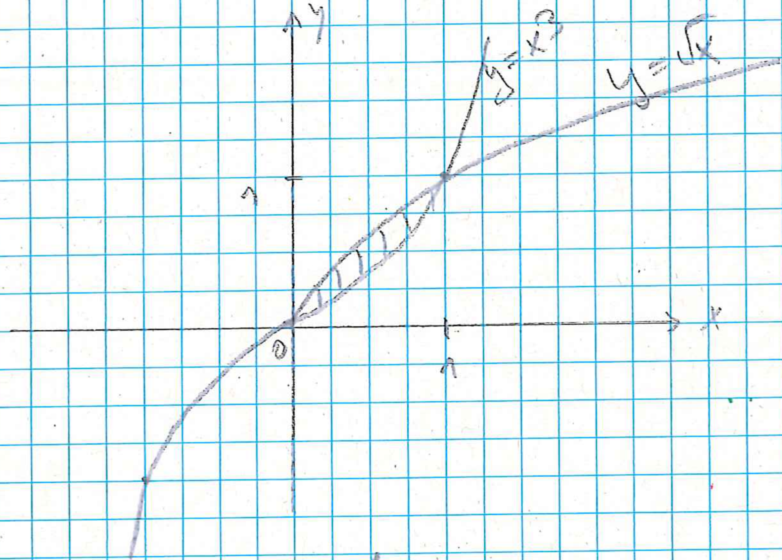
a)



$$V = \pi\int_0^2 (2x)^2\,dx - \pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx \qquad \left[⚠\ V \neq \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\,dx \ !!! \right]$$

$$= \pi\cdot 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - \pi\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \pi\cdot 4\cdot\frac{8}{3} - \pi\cdot\frac{32}{5} = \pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right) = \pi\frac{64}{15}$$

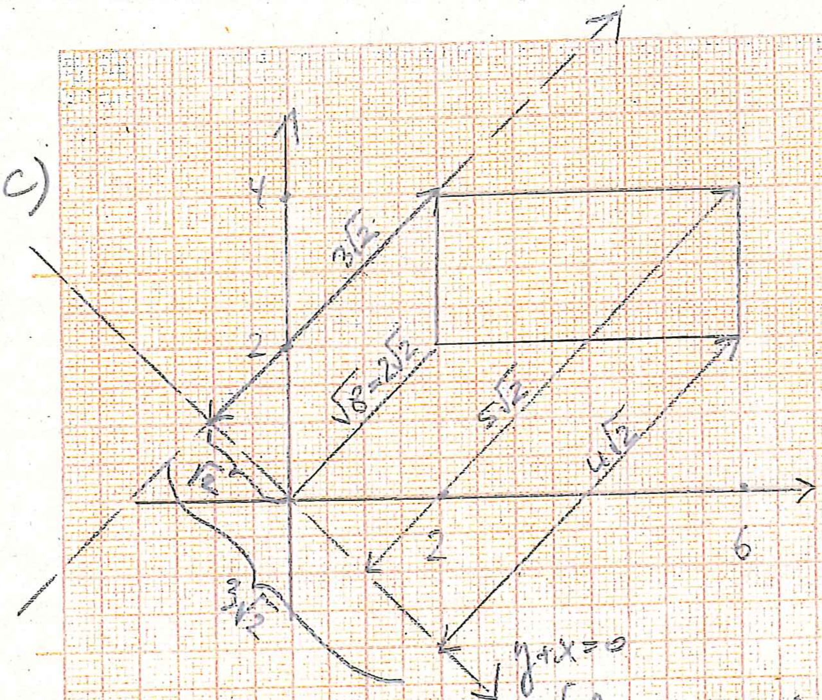
b)



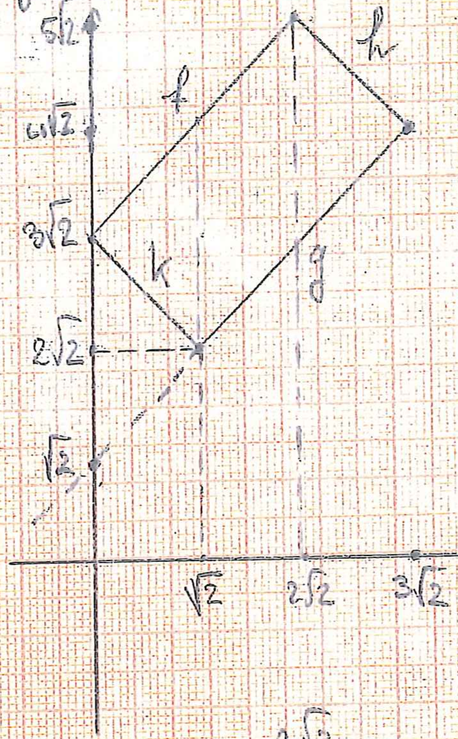
$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx - \pi\int_0^1 (x^3)^2\,dx = \pi\int_0^1 x\,dx - \pi\int_0^1 x^6\,dx$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \pi\cdot\frac{1}{2} - \pi\cdot\frac{1}{7} = \frac{5\pi}{14}$$

c)



↳ on reparamètre:



$k(x) = -x + 3\sqrt{2}$

$f(x) = x + 3\sqrt{2}$

g parallèle à f ⇒ pente de g : 1

$g(x) = x + \sqrt{2}$

h parallèle à k ⇒ pente de h = :

$h(x) = -x + b$

$h(3\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$, donc $b = 7\sqrt{2}$

$h(x) = -x + 7\sqrt{2}$

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[f^2(x) - k^2(x)\right]dx + \pi\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left[f^2(x) - g^2(x)\right] + \pi\int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}\left[h^2(x) - g^2(x)\right]dx$$

$$= \pi\left[\int_0^{\sqrt{2}} f^2(x)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f^2(x)dx - \left(\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} g^2(x)dx + \int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} g^2(x)dx\right) + \int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} h^2(x)dx - \int_0^{\sqrt{2}} k^2(x)dx\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{2\sqrt{2}}(x+3\sqrt{2})^2dx - \int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})^2dx + \int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}(-x+7\sqrt{2})^2dx - \int_0^{\sqrt{2}}(-x+3\sqrt{2})^2dx\right]$$

$$= \pi\left[\frac{(x+3\sqrt{2})^3}{3}\Big|_0^{2\sqrt{2}} - \frac{(x+\sqrt{2})^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} + \frac{(-x+7\sqrt{2})^3}{-3}\Big|_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} - \frac{(-x+3\sqrt{2})^3}{-3}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\left((5\sqrt{2})^3 - (3\sqrt{2})^3\right) - \left((4\sqrt{2})^3 - (2\sqrt{2})^3\right) - \left((4\sqrt{2})^3 - (5\sqrt{2})^3\right) + \left((2\sqrt{2})^3 - (3\sqrt{2})^3\right)\right] = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2})^3 \cdot 84$$

$$= 56\pi\sqrt{2}$$

ex 28

$$L = \int_0^5 \sqrt{1+\left(\left(x^{3/2}\right)'\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int_0^5 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx$$

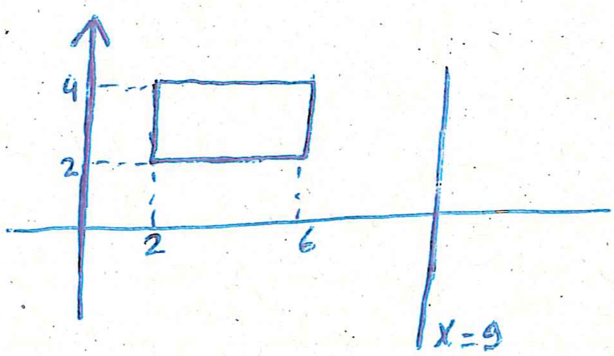
$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2} \cdot \frac{4}{9} \Big|_0^5 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right)^3 \Big|_0^5$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(\sqrt{1+\frac{45}{4}}\right)^3 - \left(\sqrt{1+0}\right)^3\right]$$

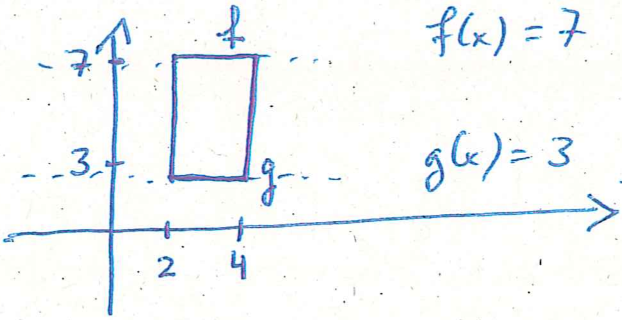
$$= \frac{8}{27}\left[\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)^3 - 1\right] = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1\right] = \frac{8}{27}\left[\frac{343}{8} - 1\right] = \frac{8}{27}\left[\frac{335}{8}\right] = \frac{335}{27}$$

ex 27*

a)



On re paramètre :



$f(x) = 7$

$g(x) = 3$

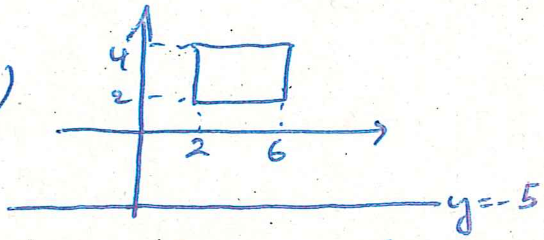
$$V = \pi\int_2^4 f^2(x)\,dx - \pi\int_2^4 g^2(x)\,dx$$

$$= \pi\, 49x \Big|_2^4 - \pi\, 9x \Big|_2^4$$

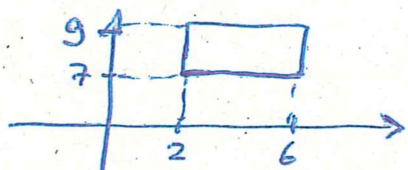
$$= \pi \cdot 49(4-2) - \pi \cdot 9 \cdot (4-2)$$

$$= 2\pi \cdot 40 = 80\pi$$

b)



$\Rightarrow$



$$V = \pi\int_2^6 81\,dx - \pi\int_2^6 49\,dx = \pi \cdot 81 \cdot (6-2) + \pi \cdot 49 \cdot (6-2) = 4\pi \cdot 32 = 128\pi$$