2

a) $\log(10) = 1$

b) $\log(1) = 0$

c) $\log_a(a) = 1$

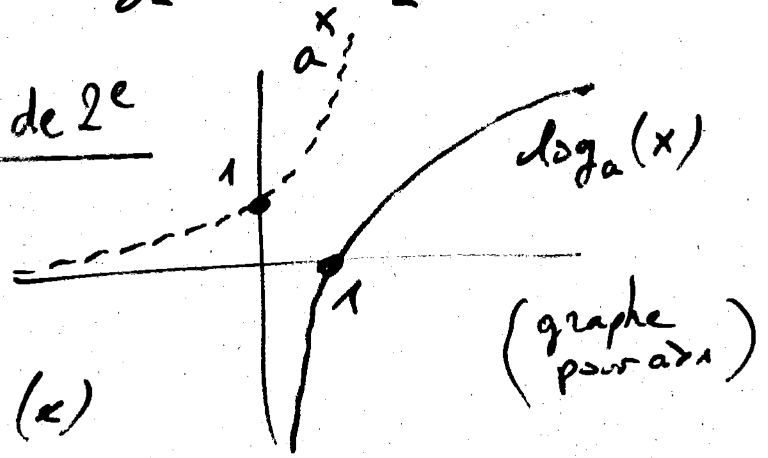
d) $\log_a(a^4) = 4$

e) $\log(0{,}001) = \log(10^{-3}) = -3$

f) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = \ln(e^{-3}) = -3$

g) $\log_2(\sqrt{8}) = \log_2(\sqrt{2^3}) = \log_2(2^{3/2}) = \frac{3}{2}$

Rappels de 2^e



$\log_a(a) = 1$

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$$x \underset{a^{(\dots)}}{\overset{\log_a(\dots)}{\rightleftarrows}} y \qquad \text{càd } \left[\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x\right]$$

changement de base:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$, en général: $\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$

$\boxed{3}$ $$\log(e)\cdot\ln(10) = \frac{\ln(e)}{\ln(\cancel{10})}\cdot\ln(\cancel{10}) = 1$$

changement de base

$\boxed{4}$ a) $$3^{2x+1} = 7 \iff \log(3^{2x+1}) = \log(7)$$
$$\iff (2x+1)\log(3) = \log(7)$$
$$\iff 2x+1 = \frac{\log(7)}{\log(3)}$$
$$\iff x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log(7)}{\log(3)} - 1\right)$$

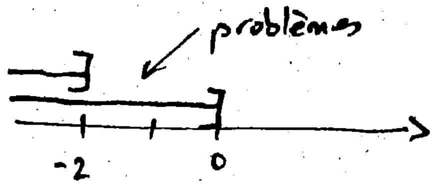
b) $$\log(x) = -3 \iff x = 10^{-3} \iff x = 0{,}001$$

c) $$\log_2(x) = 4{,}5 \iff x = 2^{4{,}5}$$
$$\iff x = 2^{9/2} \iff x = \sqrt{2^9}$$
$$\iff x = \sqrt{2\cdot 2^8} \iff x = \sqrt{2}\cdot 2^4$$
$$\iff x = 16\sqrt{2}$$

d) D : problème si $x \leq 0$

si $2+x \leq 0$

$x \leq -2$



donc $D =]0;+\infty[$ $= \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(x) - 2 = \ln(2+x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - \ln(2+x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2+x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2+x} = e^2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2(2+x)$$

$$\Leftrightarrow x = 2e^2 + xe^2$$

$$\Leftrightarrow x - xe^2 = 2e^2$$

$$\Leftrightarrow x(1-e^2) = 2e^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2e^2}{1-e^2}$$

$x \overset{?}{\in} D$: $\frac{2e^2}{1-e^2} < 0$, donc $x \notin D$

donc $S = \emptyset$

$\boxed{5}^*$ $\log(2016^{2017}) = 2017 \cdot \log(2016) \simeq 6665{,}16$

donc $\log(2016^{2017})$ a 6666 chiffres

en effet : si $1 \leq a < 10$: $0 \leq \log(a) < 1$; a à 1 chiffre

si $10 \leq a < 100$: $1 \leq \log(a) < 2$; a à 2 ch.

si $100 \leq a < 1000$: $2 \leq \log(a) < 3$; a à 3 ch

etc

⋮

$\boxed{6}$

a) $\left(\ln(4x-5)\right)' = \frac{(4x-5)'}{4x-5} = \frac{4}{4x-5}$

b) $\left(\ln\left(\sqrt{3-x^2}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt{3-x^2}\right)'}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3-x^2}}\cdot(3-x^2)'}{\sqrt{3-x^2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-x^2}}\cdot(3-x^2)' = \frac{1}{\cancel{2}(3-x^2)}\,(-\cancel{2}x)$

c) $\left(\ln(3x^5)\right)' = \frac{(3x^5)'}{3x^5} = \frac{15x^4}{3x^5} = \frac{5}{x}$

d) $\left[\ln\left((x^2+x-1)^3\right)\right]' = \frac{3(x^2+x-1)^2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-1)^3}$

$= \frac{3(2x+1)}{x^2+x-1}$

e) $(x\ln(x) - x)' = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

f) $\left(\ln(\cos(x))\right)' = \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$

g) $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

h) $\left(\ln(\ln(x))\right)' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$

i) $(e^{5x})' = e^{5x}\cdot(5x)' = 5e^{5x}$

j) $(e^{x^3})' = e^{x^3}\cdot(x^3)' = 3x^2e^{x^3}$

k) $(e^{\sin(2x)})' = e^{\sin(2x)}\cdot[\sin(2x)]' = e^{\sin(2x)}\cdot[\cos(2x)\cdot(2x)']$

$= e^{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\cdot 2$

l) $(x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = e^x\cdot x\cdot(2+x)$

ex7: $f(x) = x^2 - 8\ln x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^+_*$

$f'(x) = 2x - 8\cdot\frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = 0 \iff 2x - 8\cdot\frac{1}{x} = 0$

$\iff \frac{2x^2-8}{x} = 0$

$\iff x^2 = 4$

$x = \pm 2$

x	0		2		$+\infty$
$2x^2-8$		$-$	0	$+$	
x		$+$	1	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

valeur minimale : pour $x = 2$: $f(2) = 4 - 8\ln 2$

(valeur "maximale" : $+\infty$) $\Rightarrow$ pas de valeur maximale

ex8: a) $f(x) = x\ln x$

$D_f = \mathbb{R}^+_*$ $\qquad Z_f = \{1\}$

$f'(x) = \ln x + 1$; zeros de f' : $\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

$f(1/e) = \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e}$

fac [$f''(x) = \frac{1}{x}$

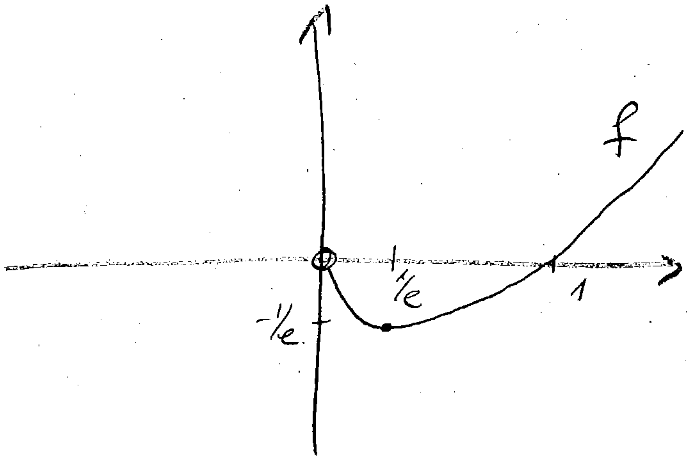
x	0			$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	
$f(x)$		$\smile$		

]

asymptotes: horiz: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ pas d'as. horiz.

fac [obl: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ pas d'as. obl.]

vert: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ cf. table p. 86 [sans preuve]



b) $f(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_*^+$; zéros $= \{e^{-1/2}\}$

$f'(x) = \dfrac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 1 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{1-2\ln x}{x^2}$

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$1-2\ln x$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

$f(e^{1/2}) = \dfrac{2}{e^{1/2}}$

fac

$f''(x) = \dfrac{-2\frac{1}{x}x^2 - 2x(1-2\ln x)}{x^4}$

$= \dfrac{-4x + 4x\ln x}{x^4}$

$= \dfrac{4x(\ln x - 1)}{x^4}$

$= \dfrac{4(\ln x - 1)}{x^3}$

x	0		e		$+\infty$
$4(\ln x - 1)$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

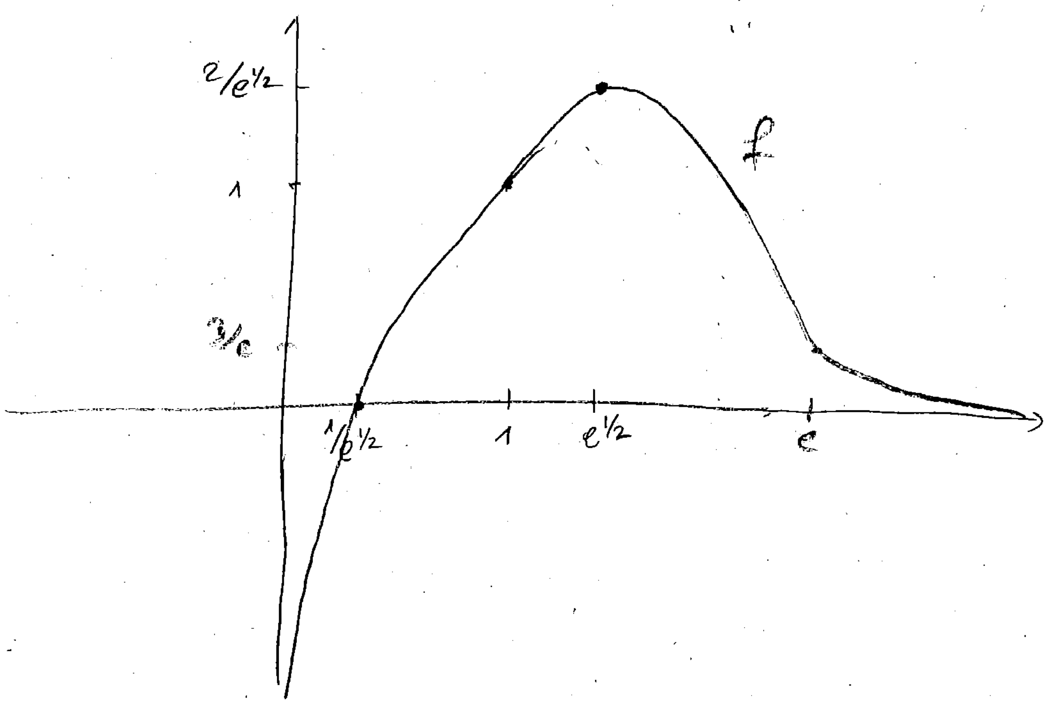
$f(e) = \dfrac{3}{e}$

as. horiz : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\ln x}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}}_{=0} + 2\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{=0} = 0$ cf table p.86 (sans preuve)

donc as. horiz $y=0$

as. vert : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+2\ln x}{x}$ du type $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (cf. table p.86) $-\infty$, car de signe $\dfrac{\text{"}-\text{"}}{\text{"}+\text{"}}$

donc as. vert à $x = 0^+$



c) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R}$ zeros $= \{0\}$

- $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
$x+1$		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	m	↗	

$f(-1) = -\frac{1}{e} \approx -0,37$

fac [$f''(x) = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f(-2) = -\frac{2}{e^2} \approx 0,27$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		−	0	+	
e^x		+	+	+	
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$		∩		∪	

]

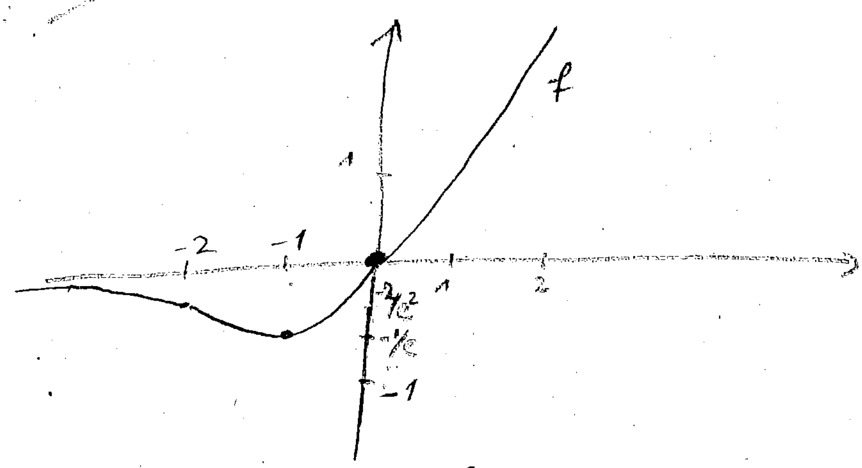
- as. horiz: $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$ as. horiz à $-\infty$: $y = 0$

↑ table p.86

fac [as. obl. à $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$: pas d'as. obl. à $+\infty$]

- as. vert: —



$f(x) = e^x(2x^2 - 3x) = e^x \cdot x \cdot (2x-3)$

- $D_f = \mathbb{R}$ zeros $= \{0; \frac{3}{2}\}$
- $f'(x) = e^x(2x^2 - 3x) + e^x(4x-3)$

$= e^x[2x^2 + x - 3]$

$= e^x(2x-3)(x+1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$2x^2+x-3$		+	0	−	0	+	
e^x		+	+	+	+	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	M	↘	m	↗	

$f(-1) = 5/e \approx 1,84$

$f(3/2) = 0$

[$f''(x) = e^x[2x^2+x-3] + e^x[4x+1]$

$= e^x[2x^2+5x-2]$

zeros de f'': $2x^2+5x-2 = 0$

$\Delta = 41$

$x_1 = \frac{-5+\sqrt{41}}{4} \approx 0,35$

$x_2 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4} \approx -2,85$

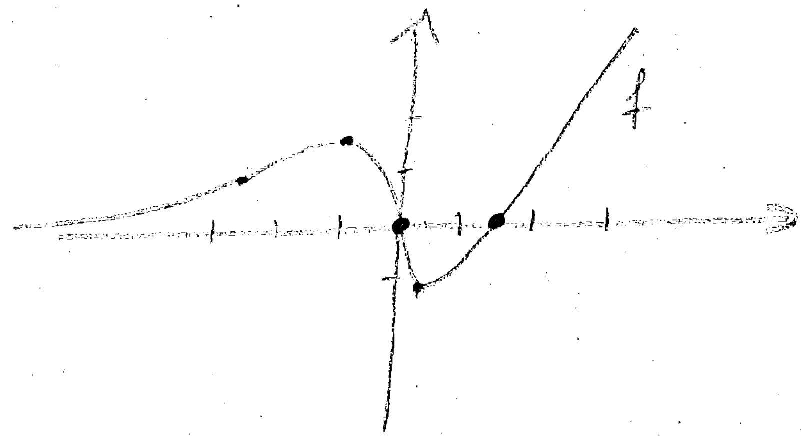
x		$-2,85$		$0,35$	
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	∪		∩		∪

$f(x_2) \approx 1,43$ $f(x_1) \approx -1,14$

- as. vert. ✓
- as. horiz. : à $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x x^2\left(2-\frac{3}{x}\right) = +\infty$

  à $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(2-3/x)}{e^{-x}} = 0$ C. tabb p. 86 — as. horiz. à $-\infty$: $y = 0$

ue[as. obl. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x x\left(2-\frac{3}{x}\right) = +\infty$
donc pas d'as. obl. à $+\infty$]



f) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. $D_f = \mathbb{R}$ zeros : $\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right) \neq 0$

- $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$
  $= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)$

  zeros de f' : $e^{2x} = 1$, $x = 0$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$f(0) = 1$

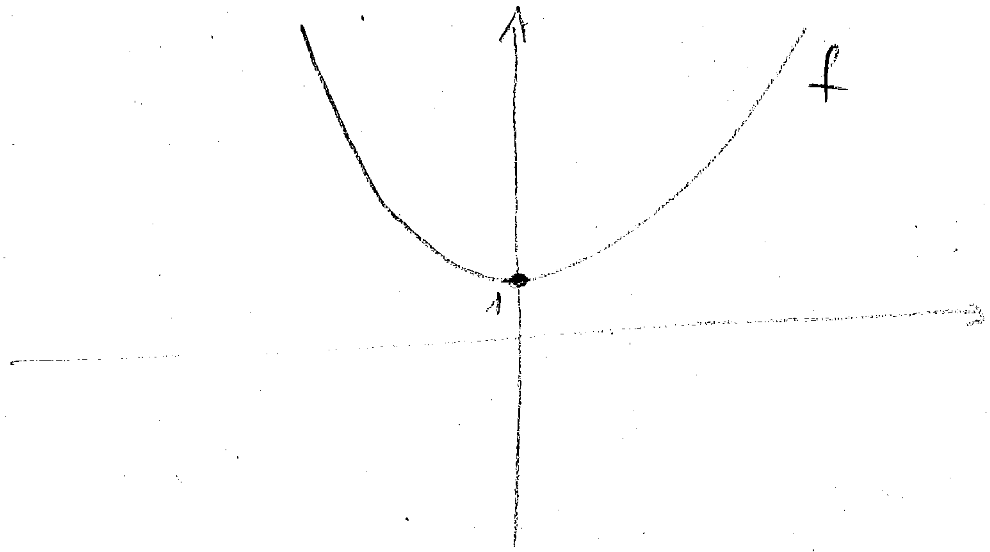
Jac[$f''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) = f(x)$!

x	
$f''(x)$	$+$ $+$ $+$
$f(x)$	∪

]

- as. horiz.
  $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

Jac[as. obl. : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{xe^x}\right) = +\infty$]



d)* $f(x) = \ln(x) + \dfrac{1-x}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_*^+$ $\quad$ zeros : $\{1 ; \ldots ?\}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x-(1-x)}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

$f(1) = 0$

fac [$f''(x) = \dfrac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \dfrac{-x^2+2x}{x^4} = \dfrac{2-x}{x^3}$

$f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
x^3		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$	

]

as. horiz : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x + \dfrac{1-x}{x}\right) = +\infty - 1 = +\infty$ $\quad$ pas d'as. horiz

fac [as. obl. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1-x}{x^2}\right) = 0$

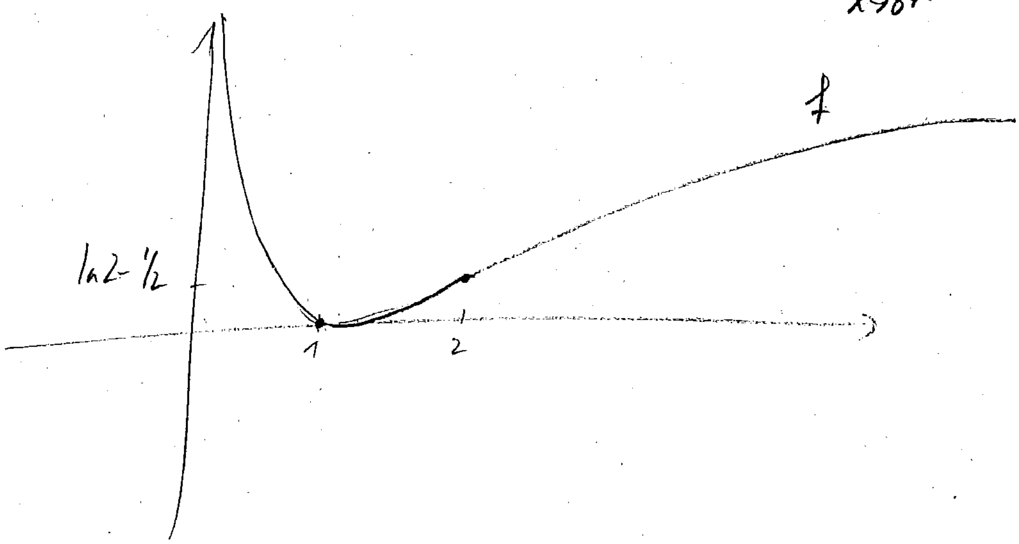
$= \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{=0} + \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{x^2}}_{=0}$

(cf. table p.86)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

} pas d'as. obl.]

[as. vert : techniquement non accessible ; exploration numérique $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$]



10

a) $\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x+2| + cte$

b) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + cte$

c) $\int \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1+1}{x+1}\,dx$

$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$= x + \ln|x+1| + cte$

d) $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + cte$

e) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + cte$

f) $\int (e^x+1)^3 e^x\,dx = \frac{1}{4}(e^x+1)^4 + cte$

g) $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\,dx$

$= \int 1\,dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$= x - \ln|e^x+1| + cte$

11 a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{3+x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{3-x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|3+x|\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left(-\ln|3-x|\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 4)$

$= \ln 4 - \ln 2 = \ln 2^2 - \ln 2$

$= 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$

b) $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4}\,dx = 2\ln|x^2-4|\Big|_0^1$

$= 2(\ln 3 - \ln 4) \quad (= 2\ln(3/4))$

c) $\int_2^3 5e^{2x+1}\,dx = 5e^{2x+1}\cdot\frac{1}{2}\Big|_2^3$

$= \frac{5e^7}{2} - \frac{5e^5}{2} = \frac{5}{2}e^5(e^2-1)$

d) $\int_{-1}^{2} 3x\,e^{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}e^{x^2-1}\Big|_{-1}^{2}$

$= \frac{3}{2}(e^3 - e^0) = \frac{3}{2}(e^3-1)$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\sin(2x)|\Big|_{\pi/8}^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 0 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1) - \ln(\sqrt{2})\right) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})$

$= \frac{1}{2}\ln(2^{1/2}) = \frac{1}{4}\ln(2)$

f) $\int_0^{\pi/4} tg(x)\,dx = \int_0^{\pi/4}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$= -\ln|\cos(x)|\Big|_0^{\pi/4} = -\left(\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln|\cos($

$= -\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right) = -\ln(2^{-1/2}) = \frac{1}{2}\ln($

ex 9 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

ex 12 : $\displaystyle\int 5e^{2x} - 3x \,dx = 5\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - 3\frac{x^2}{2} + C = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 + C$

Celle dont la représentation graphique passe par $(0;2)$:

$\frac{5}{2}e^{2\cdot 0} - \frac{3}{2}\cdot 0^2 + c = 2 \iff \frac{5}{2}\cdot 1 + C = 0 \iff C = -\frac{5}{2}$

d'où $F(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}$

ex 13 : a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{100}}\,dt$ bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{100}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc, par thm fond I, on a : $F'(x) = f(x)$

Comme $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, F est croissante sur $\mathbb{R}$ [par lien AF]

C'est donc faux.

(⚠ la fonction f est-elle bien décroissante !)

b) $\left[\ln\left((x+1)^3\right)\right]' = \dfrac{\left[(x+1)^3\right]'}{(x+1)^3} = \dfrac{3(x+1)^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^3} = \dfrac{3}{x+1}$

$\left[3\ln(5x+5)\right]' = 3\left[\ln(5x+5)\right]' = 3\cdot\dfrac{(5x+5)'}{5x+5} = 3\cdot\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{5}(x+1)} = \dfrac{3}{x+1}$

les dérivées sont égales, donc f et g sont deux primitives de la même fonction définie par $h(x) = \frac{3}{x+1}$

Remarque : elles diffèrent donc d'une même constante $C \iff f(x) - g(x) = C$

On peut grâce aux propriétés du ln déterminer cette constante :

$\ln\left[(x+1)^3\right] - 3\ln(5x+5)$

$= 3\ln(x+1) - 3\ln\left[5(x+1)\right]$

$= 3\ln(x+1) - 3\left[\ln 5 + \ln(x+1)\right]$

$= 3\cancel{\ln(x+1)} - 3\ln 5 - \cancel{3\ln(x+1)}$

$= -3\ln 5$

d'où $C = -3\ln 5$