MaUN Chapitre 4 Corrigé des exercices

ex 1

$M_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M_{1\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$

$M_{4\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 \\ \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M_{2\times2} = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}7 \\ 3{,}33 & 1/4 \end{pmatrix}$

ex 2

a) $D+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

b) $D+I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $B+A \ \nexists$

d) $O+D = D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $C+D \ \nexists$

f) $2B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

g) $-3D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

h) $\sqrt{2}\, I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

i) $2E = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

j) $-F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

k) $4D - B + O = 4D + B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$

ex 4

a) $BA = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

b) $AB \ \nexists$

c) $BD = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

d) $DB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$

e) $OA = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $AO = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $DI = D$

h) $I^3 = I$

i) $DIB = DB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$

j) $AC = \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$

k) $CA = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & 23 & 14 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

l) $I^{2345} = I$

m) $CB = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 17 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

n) $ACB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 17 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 68 \\ 15 & -11 \end{pmatrix}$

o) $OIBDBDD = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ex 5

AB existe $\Leftrightarrow$ $A_{n\times m} \cdot B_{p\times q}$ avec $m=p$
et BA existe $\quad B_{p\times q} \cdot A_{n\times m}$ avec $q=n$

$$\Leftrightarrow A_{n\times m} \cdot B_{m\times n}$$

donc les matrices peuvent ne pas être carrées

c-exple : $A=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

$$A_{2\times 1} \cdot B_{1\times 2} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{2\times 1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 2} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2\\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2\end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B_{1\times 2} \cdot A_{2\times 1} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix}1\cdot 3 + 2\cdot 1\end{pmatrix}_{1\times 1} = \begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$$

la conjecture est donc fausse

ex 6

$$(A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix}1 & -6\\ 22 & 22\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix}1 & -6\\ 22 & 22\end{pmatrix}$$

ex 7

a) $$A^2 = \begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & \cos(2a)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & \cos(2a)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos^2(2a)+\sin^2(2a) & 2\cos(2a)\sin(2a)\\ 2\sin(2a)\cos(2a) & \sin^2(2a)+\cos^2(2a)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \sin(4a)\\ \sin(4a) & 1\end{pmatrix}$$

car $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
et $2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$

b) $B^3 = \dots = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

c) $C^2 = \dots = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

ex 8

a) $\det(A) = 1\cdot 1 - 1(-1) = 2$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $\det A = 0$

$A^{-1} \nexists$

b) $\det A = 1$

$A^{-1} = A$

d) $\det A = -2$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

e) $\det A = -1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

ex 9

$A^{-1} \nexists \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow 2a\cdot a - (-3)a = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a(2a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 3/2$

ex 10

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -3x - 2y = 4 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$AS = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det A = -4 + 15 = 11$

$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $A^{-1}AS = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow S = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 - 20 \\ 3 + 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -22 \\ 11 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution : $\{(-2;1)\}$

b) $\begin{cases} -3x + 6y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det A = -12 - (-12) = 0 \Leftrightarrow A^{-1} \nexists$!

On ne peut pas résoudre ce système avec cette méthode

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases}$ il s'agit des équations de deux droites parallèles !

donc $S = \emptyset$

ex11b Exemple de calcul à la main de l'inverse d'une matrice 3×3

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) $\det(F) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (2 \cdot 1 - 0(-1)) - 0 \cdot (\dots) + 3\,((-1)(-1) - 2 \cdot 2)$

$= -7$

ii)
$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iii)
$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

iv)
$$F^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & 5/7 & -1/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

Vérification : $F \cdot F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/7 & -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & 5/7 & -1/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et idem $F^{-1} \cdot F = I$

ex11a

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(5-1) - 0 + 2(-1-3)$

$= 8 - 8 = 0$

donc $B^{-1} \nexists$

ex 12 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est la matrice F de l'ex 12 b !

donc $A^{-1} = F^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

on pose encore $S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et on a : $AS = B \Leftrightarrow S = A^{-1} \cdot B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la solution du système est : $S = \{(0;1;1)\}$