ANALYSE (environ 44% de l'examen)

Exercice 1 (11 pts)

Déterminer les intégrales (primitives) suivantes :

(a) $\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{dx}$

(b) $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{dx}$

(c) $\int x\cos(x)\,\mathrm{dx}$

(d) $\int x\cos(x^2)\,\mathrm{dx}$

Exercice 2 (12 pts)

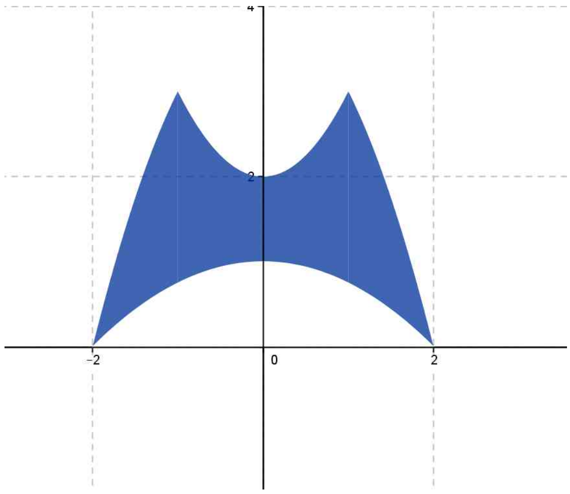
On considère la surface ci-dessous.

Elle est délimitée par les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$f(x)=4-x^2$

$g(x)=x^2+2$

$h(x)=-\frac{x^2}{4}+1$



Calculer l'aire de cette surface.

Exercice 3 (10 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x)=2x\cdot e^{-x^2}$.

(a) Déterminer l'ensemble des zéros de f.

(b) Calculer $f'(x)$.

(c) Déterminer par calcul les intervalles de croissance et décroissance de f.

Exercice 4 (10 pts)

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

On s'intéresse aux volumes de révolution obtenus en faisant pivoter la représentation graphique de f entre $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$ autour de l'axe *Ox* (pour $a > 0$ et $b > 0$).

(a) Calculer ce volume pour $a = 2$ et $b = 5$.

(b) Esquisser le corps de révolution obtenu.

(c) Déterminer l'expression du volume pour des valeurs quelconques a et b.

(d) Que devient ce volume lorsque $a = 1$ et b tend vers $+\infty$?

(e) Que devient ce volume lorsque a tend vers 0^+ et $b = 5$?

COMBINATOIRE ET PROBABILITE (environ 28% de l'examen)

Exercice 5 (14 pts)

Les dés de Shazam

Ce jeu comporte 3 dés à 6 faces, bien équilibrés, disons A,B et C.

- le dé A : sur quatre faces est noté le nombre « 1 » et sur deux faces est noté le nombre « 10 »
- le dé B : sur quatre faces est noté le nombre « 6 » et sur deux faces est noté le nombre « 0 »
- le dé C : sur chacune de ses faces est noté le nombre « 4 »

Une partie de dés de Shazam se joue à deux joueurs. Chaque joueur choisit un des trois dés et le lance une fois. Le vainqueur est celui qui obtient le nombre le plus élevé.

(a) En lançant une fois le dé A , quelle est la probabilité d'obtenir le nombre « 10 »?

(b) En lançant 6 fois le dé A, quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le nombre « 10 » ?

(c) En lançant 6 fois le dé A , quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre « 10 » ?

Antoine choisit le dé A, Basile le dé B et Christophe le dé C.

(d) Quelle est la probabilité qu'Antoine obtienne « 1 » et Basile « 6 » ?

(e) Quelle est la probabilité qu'Antoine gagne contre Basile ?

(f) Quelle est la probabilité que Basile gagne contre Christophe ?

(g) Quelle est la probabilité que Christophe gagne contre Antoine ?

(h) Vous faites une partie de dés de Shazam avec un ami. Il vous propose de choisir votre dé en premier. Est-ce un avantage pour vous ? Justifier.

Exercice 6 (13 pts)

Un casino est équipé de 10 machines à sous, toutes différentes. Parmi ces 10 machines, trois sont défectueuses.

(a) Trois amis entrent dans le casino et s’asseyent devant trois machines. De combien de manières différentes peuvent-ils le faire ?

(b) Quelle est probabilité qu’ils se trouvent par hasard devant les trois machines défectueuses ?

La probabilité de gagner avec une machine en bon état est de 0.1. La probabilité de gagner avec une machine défectueuse est de 0.5.

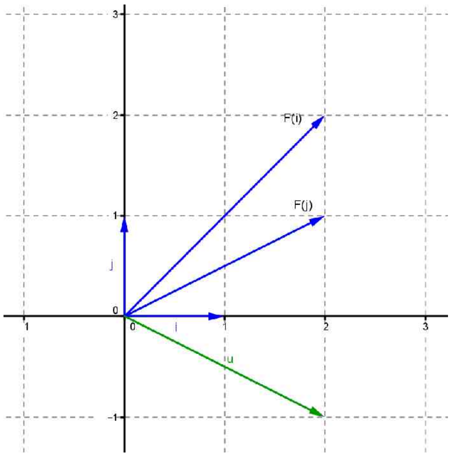
(c) Un joueur entre dans le casino, choisit une machine au hasard, joue une fois et gagne. Quelle est la probabilité que la machine choisie soit défectueuse ?

(d) Une partie coûte 3 CHF, en cas de victoire la machine redonne 10 CHF le gain est donc de 7 CHF. Un joueur entre dans le casino, choisit une machine au hasard et joue une fois, quelle est son espérance de gain ?

ALGEBRE LINEAIRE (environ 28 % de l'examen)

Exercice 7 (8 pts)

Soit *F* une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie ce qui est indiqué dans le repère ci-dessous.



(a) Déterminer en utilisant la représentation graphique ci-dessus la matrice associée à l'application *F*.

(b) Déterminer l'image du vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ par l'application *F*.

(c) Déterminer la ou les préimage(s) du vecteur $\vec{u}$ par l'application *F*.

Exercice 8 **(20 pts)**

On considère l'application $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que F est linéaire.

(b) Représenter graphiquement le carré de sommets (0;0), (0;1), (1;1) et (1;0) ainsi que son image par F.

Une application linéaire dont la matrice est de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée un « cisaillement ».

(c) L'application F est-elle un cisaillement ? Justifier.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, associée à un cisaillement.

(d) Déterminer la matrice A^3 .

(e) Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle inversible ?

(f) Déterminer la matrice A^{-1} inverse de A.

(g) Que pensez-vous de la conjecture suivante : « *la réciproque d'un cisaillement est aussi un cisaillement* ». Justifier.

(h) Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Montrer que la composition de deux cisaillements est encore un cisaillement.
