Exercice 5

a) On doit avoir $x>0$ et $8-x>0 \Leftrightarrow x<8$ donc $D=\mathbb{R}_+^* \cap]-\infty;8[=]0;8[$

$\log_4(x)=\log_4(8-x) \Leftrightarrow x=8-x \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4 \Leftrightarrow S=\{4\}$

b) On doit avoir $x^2>0$ et $-3x-2>0 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$ donc $D=\mathbb{R}^* \cap]-\infty;-2/3[=]-\infty;-2/3[\setminus\{0\}$.

$\log(x^2)=\log(-3x-2) \Leftrightarrow x^2=-3x-2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow S=\{-2;-1\}$

c) On doit avoir $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$ donc $D=]4;\infty[$

$\log_3(x-4)=2 \Leftrightarrow \log_3(x-4)=\underbrace{\log_3(3^2)}_{=2} \Leftrightarrow x-4=3^2 \Leftrightarrow x=13 \Leftrightarrow S=\{13\}$

d) On doit avoir $x>0$ donc $D=\mathbb{R}_+^*$.

$\log_9(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_9(x)=\log_9(9^{3/2}) \Leftrightarrow x=9^{3/2} \Leftrightarrow x=\sqrt{9^3} \Leftrightarrow x=\sqrt{3^6} \Leftrightarrow x=3^3$

Exercice 6

a) On doit avoir $-x>0 \Leftrightarrow x<0$ et $8-x>0 \Leftrightarrow x<8$ donc $D=\mathbb{R}_-^* \cap]-\infty;8[=\mathbb{R}_-^*$

$\log_4(-x)=\log_4(8-x) \Leftrightarrow -x=8-x \Leftrightarrow 0=8 \Leftrightarrow S=\emptyset$

b) On doit avoir $x^2-2x>0 \Leftrightarrow x(x-2)>0$ et $-2x+1>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$ donc

$D=\mathbb{R}\setminus[0;2] \cap]-\infty;1/2[=\mathbb{R}_-^*$.

$\log_7(x^2-2x)=\log_7(-2x+1) \Leftrightarrow x^2-2x=-2x+1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-1 \underset{x_1 \notin D}{\Leftrightarrow} S=\{-1\}$

c) On doit avoir $x>0$ et $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ donc $D=\mathbb{R}_+^*$.

$\log_2(x)+\log_2(x+2)=3 \Leftrightarrow \log_2(x)+\log_2(x+2)=\log_2(2^3) \Leftrightarrow \log_2(x\cdot(x+2))=\log_2(2^3)$
$\Leftrightarrow x(x+2)=2^3 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2)=0 \Leftrightarrow x_1=-4,\ x_2=2 \underset{x_1 \notin D}{\Leftrightarrow} S=\{2\}$

d) $D=\mathbb{R}$

$2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2(3) \Leftrightarrow x=\frac{\log(3)}{\log(2)} \Leftrightarrow S=\left\{\frac{\log(3)}{\log(2)}\right\} \simeq \{1.6\}$

e) $D=\mathbb{R}$

$$5^{2x+1}=6^{x-2}\Leftrightarrow\log(5^{2x+1})=\log(6^{x-2})\Leftrightarrow(2x+1)\log(5)=(x-2)\log(6)\Leftrightarrow$$
$$2x\log(5)+\log(5)=x\log(6)-2\log(6)\Leftrightarrow 2x\log(5)-x\log(6)=-\log(5)-2\log(6)\Leftrightarrow$$
$$x(2\log(5)-\log(6))=\log\left(\frac{1}{5}\right)-\log(6^2)\Leftrightarrow x\left(\log\left(\frac{5^2}{6}\right)\right)=\log\left(\frac{1}{180}\right)\Leftrightarrow x=\frac{-\log(180)}{\log\left(\frac{25}{6}\right)}$$
$$\Leftrightarrow S=\frac{-\log(180)}{\log\left(\frac{25}{6}\right)}\simeq\{-3.6\}$$

Exercice 7

a) Selon le théorème intérêt composé, on a $C(t)=C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$ où

$C_0=6000$, $C(t)=25000$, $n=1$, $i=0.1$. Ainsi, on résout :

$$C(t)=C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}\Leftrightarrow 25000=6000\cdot(1.1)^t\Leftrightarrow\frac{25}{6}=(1.1)^t\Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{25}{6}\right)=\log((1.1)^t)\Leftrightarrow\log\left(\frac{25}{6}\right)=t\log(1.1)\Leftrightarrow t=\frac{\log\left(\frac{25}{6}\right)}{\log(1.1)}\simeq 14.97$$

Il faudra 15 ans pour que le dépôt atteigne 25’000 fr.

b) De la même manière, on résout :

$$C(t)=C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}\Leftrightarrow 25000=6000\cdot\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12t}\Leftrightarrow\frac{25}{6}=\left(\frac{121}{120}\right)^{12t}\Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{25}{6}\right)=\log\left(\left(\frac{121}{120}\right)^{12t}\right)\Leftrightarrow\log\left(\frac{25}{6}\right)=12t\log\left(\frac{121}{120}\right)\Leftrightarrow t=\frac{\log\left(\frac{25}{6}\right)}{12\log\left(\frac{121}{120}\right)}\simeq 14.33$$

Il faudra 14 ans et 4 mois pour que le dépôt atteigne 25’000 fr.

c) Selon le théorème intérêt composé continu, on a $C(t)=C_0e^{it}$. On résout donc :

$$C(t)=C_0e^{it}\Leftrightarrow\frac{C(t)}{C_0}=e^{it}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)=\ln(e^{it})\Leftrightarrow\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)=it\Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)}{i}\Leftrightarrow$$

$$t=\frac{\ln\left(\frac{25000}{6000}\right)}{0.1}\simeq 14.27$$

Il faudra 14 ans, 3 mois et une semaine pour que le dépôt atteigne 25'000 fr.

Exercice 8

$$\log_a\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}\right)=\log_a(x^3)+\log_a(\sqrt{y})-\log_a(z^2)=3\log_a(x)+\frac{1}{2}\log_a(y)-2z\log(z)$$

Donc $a=3$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-2$.

Exercice 9

On considère l'égalité suivante : $a^{\log_a(q)+\log_a(s)-\log_a(t)}\underset{\text{prop. puiss}}{=}\frac{a^{\log_a(q)}\cdot a^{\log_a(s)}}{a^{\log_a(t)}}\underset{\text{thm3. log}}{=}\frac{q\cdot s}{t}$

On prend le log des 2 côtés : $\underbrace{\log_a\left(a^{\log_a(q)+\log_a(s)-\log_a(t)}\right)}_{\underset{\text{thm2 log}}{=}\log_a(q)+\log_a(s)-\log_a(t)}=\log_a\left(\frac{q\cdot s}{t}\right)$

On peut justifier l'égalité $\underset{\text{thm2. log}}{=}$ ainsi : $\log_a(x)=y\underset{\text{déf log}}{\Leftrightarrow}a^y=x\underset{x=a^y}{\Leftrightarrow}\log_a(a^y)=y$.

On peut justifier l'égalité $\underset{\text{thm3. log}}{=}$ ainsi : $\log_a(x)=y\underset{\text{déf log}}{\Leftrightarrow}a^y=x\underset{y=\log_a(x)}{\Leftrightarrow}a^{\log_a(x)}=x$.

Exercice 10

a) On doit avoir $2x+3>0\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$ donc $D=]-3/2;+\infty[$.

$\log_5(2x+3)=\log_5(11)+\log_5(3)\Leftrightarrow\log_5(2x+3)=\log_5(3\cdot 11)\Leftrightarrow 2x+3=33\Leftrightarrow x=15\Leftrightarrow S=\{15\}$

b) On doit avoir $-x>0\Leftrightarrow x<0$ et $x-7>0\Leftrightarrow x>7$ donc $D=\emptyset\Rightarrow S=\emptyset$.

c) On doit avoir $x+6>0\Leftrightarrow x>-6$ et $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ donc $D=]1;+\infty[$

$\ln(x+6)-\ln(10)=\ln(x-1)-\ln(2)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x+6}{10}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{x+6}{10}=\frac{x-1}{2}\Leftrightarrow$
$2x+12=10x-10\Leftrightarrow 8x=22\Leftrightarrow x=\frac{11}{4}\Leftrightarrow S=\left\{\frac{11}{4}\right\}$

d) On a $D=\mathbb{R}_+^*$.

$2\log_3(x)=3\log_3(5)\Leftrightarrow\log_3(x^2)=\log_3(5^3)\Leftrightarrow x^2=5^3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{125}=\pm5\sqrt{5}\underset{-5\sqrt{5}\notin D}{\Leftrightarrow}S=\{5\sqrt{5}\}$

Ou avec la déf du log : $2\log_3(x)=3\log_3(5)\Leftrightarrow\log_3(x)=\frac{3\log_3(5)}{2}\underset{\text{déf log}}{\Leftrightarrow}x=3^{\frac{3\log_3(5)}{2}}=3^{\frac{\frac{3\log(5)}{\log(3)}}{2}}$

e) On doit avoir $x+3>0\Leftrightarrow x>-3$ et $x+5>0\Leftrightarrow x>-5$ donc $D=]-3;+\infty[$.
$\log_3(x+3)+\log_3(x+5)=1\Leftrightarrow\log_3((x+3)(x+5))=\log_3(3)\Leftrightarrow(x+3)(x+5)=3\Leftrightarrow$
$x^2+8x+12=0\Leftrightarrow(x+6)(x+2)=0\Leftrightarrow x_1=-6,\ \ x_2=-2\underset{x_1\notin D}{\Leftrightarrow}S=\{-2\}$

Exercice 11

a) $6^x=7\Leftrightarrow\log(6^x)=\log(7)\Leftrightarrow x\log(6)=\log(7)\Leftrightarrow x=\frac{\log(7)}{\log(6)}\Leftrightarrow S=\left\{\frac{\log(7)}{\log(6)}\right\}\simeq\{1.09\}$

b) $5^{x-4}=2\Leftrightarrow\log(5^{x-4})=\log(2)\Leftrightarrow(x-4)\log(5)=\log(2)\Leftrightarrow x-4=\frac{\log(2)}{\log(5)}\Leftrightarrow x=4+\frac{\log(2)}{\log(5)}$
$\Leftrightarrow S=\left\{\frac{\log(2)}{\log(5)}\right\}\simeq\{4.43\}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=100\Leftrightarrow\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)=\log(100)\Leftrightarrow x\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\log(10^2)\Leftrightarrow x=\frac{\log(10^2)}{\log(1)-\log(2)}\Leftrightarrow$
$x=\frac{2}{0-\log(2)}=-\frac{2}{\log(2)}\Leftrightarrow S=\left\{-\frac{2}{\log(2)}\right\}\simeq S=\{6.64\}$

Exercice 12

a) $\log_6(5)=\frac{\log(5)}{\log(6)}$ **b)** $\log_{0.5}(0.2)=\frac{\log(0.2)}{\log(0.5)}=\frac{\log(1)-\log(5)}{\log(1)-\log(2)}=\frac{\log(5)}{\log(2)}$

Exercice 13

a) $3^{x+4}=2^{1-3x} \Leftrightarrow \log(3^{x+4})=\log(2^{1-3x}) \Leftrightarrow (x+4)\log(3)=(1-3x)\log(2) \Leftrightarrow$
$x\log(3)+4\log(3)=\log(2)-3x\log(2) \Leftrightarrow x\log(3)+3x\log(2)=\log(2)-4\log(3) \Leftrightarrow$

$$x(\log(3)+3\log(2))=\log\left(\frac{2}{3^4}\right) \Leftrightarrow x\left(\log\left(3\cdot 2^3\right)\right)=\log\left(\frac{2}{3^4}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\log\left(\frac{2}{81}\right)}{\log(24)}$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{\log\left(\frac{2}{81}\right)}{\log(24)} \simeq \{-1.16\}$$

b) $2^{2x-3}=5^{x-2} \Leftrightarrow \log(2^{2x-3})=\log(5^{x-2}) \Leftrightarrow (2x-3)\log(2)=(x-2)\log(5) \Leftrightarrow$
$2x\log(2)-3\log(2)=x\log(5)-2\log(5) \Leftrightarrow 2x\log(2)-x\log(5)=3\log(2)-2\log(5) \Leftrightarrow$

$$x(2\log(2)-\log(5))=\log\left(\frac{2^3}{5^2}\right) \Leftrightarrow x\left(\log\left(\frac{2^2}{5}\right)\right)=\log\left(\frac{2^3}{5^2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\log\left(\frac{8}{25}\right)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{\log\left(\frac{8}{25}\right)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq \{5.11\}$$

c) On doit avoir $x^2+4>0 \Leftrightarrow x^2>-4$, $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ et $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ donc
$D=\mathbb{R} \cap]-2;+\infty[\cap]2;+\infty[=]2;+\infty[$.

$$\log(x^2+4)-\log(x+2)=2+\log(x-2) \Leftrightarrow \log\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)=\log(10^2)+\log(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)=\log(10^2(x-2)) \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2}=100(x-2) \Leftrightarrow x^2+4=100(x-2)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$x^2+4=100(x^2-4) \Leftrightarrow 99x^2=404 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{404}{99}} \underset{x_1 \notin D}{\Leftrightarrow} S=\left\{\sqrt{\frac{404}{99}}\right\} \simeq \{2.02\}$$