

Act 9

a) Conj: Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\log_a(uv) = \log_a(u) \log_a(v)$

contre-exemple: $\log(2 \cdot 1) \neq \log(2) \cdot \log(1)$

$$\Leftrightarrow \log(2) \neq \log(2) \cdot 0$$

$\Leftrightarrow \log(2) \neq 0$ nm, donc la conj. est fautive

b) Conj: Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

dém: $\log_a(uv) \stackrel{?}{=} \log_a(u) + \log_a(v)$

$$\Leftrightarrow a^{\log_a(u) + \log_a(v)} \stackrel{?}{=} u \cdot v$$

[def \log_a]

$$\Leftrightarrow a^{\log_a(u)} \cdot a^{\log_a(v)} \stackrel{?}{=} u \cdot v$$

[prop. puissances]

$$\Leftrightarrow u \cdot v \stackrel{?}{=} u \cdot v$$

[thm \log_a / Act 5(c)]

q.e.d.

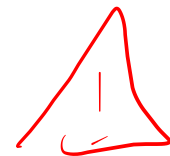


rem:

$$\log_a(u \cdot v) \stackrel{?}{=} \log_a(u) + \log_a(v)$$

(=)

$$u \cdot v \stackrel{?}{=} u + v$$



$$\log_a(\dots) = \log_a(\dots)$$

(c) Conj. Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(v)}$$

C-exemple : $a=10$
 $(u=v=1)$

$$\log\left(\frac{1}{1}\right) \stackrel{?}{=} \frac{\log(1)}{\log(1)}$$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{?}{=} \frac{0}{0} \quad \text{donc la conj est fautive}$$

(d) Conj. Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

dém.

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) \stackrel{?}{=} \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\Rightarrow a^{\log_a(u) - \log_a(v)} \stackrel{?}{=} \frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{\log_a(u)}}{a^{\log_a(v)}} \stackrel{?}{=} \frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{v} \stackrel{?}{=} \frac{u}{v} \quad \left[\text{cf Act 5c par } \log_a \right]$$

$$\frac{u}{v} \xrightarrow{\log_a(\dots)} \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\xleftarrow{a^{\dots}}$$

[def $\log_a(\dots)$]

[prop. (thm) puissances]

e) Conj: Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $u \in \mathbb{R}_+^*$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $\log_a(u^c) = c \log_a(u)$

dem: $\log_a(u^c) \stackrel{?}{=} c \log_a(u)$

$$\Leftrightarrow a^{c \log_a(u)} \stackrel{?}{=} u^c$$

$$\Leftrightarrow [a^{\log_a(u)}]^c \stackrel{?}{=} u^c$$

$$\Leftrightarrow [u]^c \stackrel{?}{=} u^c$$

qfd

[def \log_a]

[prop. puissances]

[thm \log_a / Art 5(c)]