Vacherie !
Solution

1. Thm cosinus : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$, donc

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{10{,}64^2+6{,}3^2-7{,}1^2}{2\cdot 10{,}64\cdot 6{,}3}\\ &(\cong 0.76448)\\ \text{donc}\quad \gamma &= \cos^{-1}\left(\frac{10{,}64^2+6{,}3^2-7{,}1^2}{2\cdot 10{,}64\cdot 6{,}3}\right)\\ &\cong 40{,}14°\end{aligned}$$

2. Thm sinus : $\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$, donc

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{c}\\ \Leftrightarrow\quad &\frac{\sin(\alpha)}{10{,}64}=\frac{\sin(40{,}14)}{7{,}1}\\ \Leftrightarrow\quad &\sin(\alpha)=\frac{\sin(40{,}14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}\\ (\Leftrightarrow\quad &\cong 0{,}96608)\\ \text{donc}\quad \alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{\sin(40.14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}\right)\\ &\cong 75{,}03°\end{aligned}$$

3. $\alpha+\beta+\gamma=180 \quad\Leftrightarrow\quad \beta=180-\alpha-\gamma$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad &\beta\cong 180-75{,}03-40{,}14\\ \Leftrightarrow\quad &\beta\cong 69{,}83°\end{aligned}$$

Thm cosinus :

$$\begin{aligned}&b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)\\ \Leftrightarrow\quad &6{,}3^2=10{,}64^2+7{,}1^2-2\cdot 10{,}64\cdot 7{,}1\cdot\cos(69{,}83)\\ \Leftrightarrow\quad &39{,}69=111.52 \qquad \text{c'est faux !}\end{aligned}$$

Explications

Première vacherie

Dans le calcul de α en 2., on utilise la fonction $\sin^{-1}$ de la calculatrice, qui ne travaille qu'avec des angles dans l'intervalle [-90; 90] (la fonction $\cos^{-1}$, elle, travaille dans l'intervalle [0; 180]). Chaque fois qu'on utilise les touches $\sin^{-1}$ et $\cos^{-1}$, il faut donc être très attentif à se poser la question de savoir si il n'y aurait pas d'autres solutions au problème considéré, autrement dit si les angles qu'on cherche sont bien dans l'intervalle de définition de la calculatrice pour les fonctions $\sin^{-1}$ et $\cos^{-1}$.

C'est le problème dans cet exercice. Quand on doit résoudre $\sin(\alpha)=\frac{\sin(40{,}14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}$, il y a en fait deux solutions possibles, et la machine n'en donne qu'une, celle qui est dans [-90 ;90] ! Il faut penser qu'il peut en exister une deuxième – égale à 180 – la première - puis voir laquelle sera celle qui est la bonne solution du problème (voir la résolution complète de l'exercice plus bas) !

Plus simplement, dans le cas de la résolution d'un triangle quelconque pour lequel on connaît les trois (longueurs de) côtés, l'utilisation du thm du cosinus pour rechercher un angle ne pose elle pas de problème, puisque la machine donnera l'unique solution comprise dans l'intervalle [0 ;180], ce qui correspond toujours à ce qu'on cherche.

C'est donc la stratégie recommandée : on évite le thm du sinus, on applique deux fois le thm du cosinus et on trouve le 3ème angle avec le thm sur la somme des angles dans un triangle.

Vacherie intermédiaire n°1

Toujours dans le cas de la résolution d'un triangle quelconque pour lequel on connaît les trois (longueurs de) côtés, ne pas oublier de vérifier que la somme des longueurs des deux plus petits côtés est strictement supérieure à la longueur du plus grand; sinon, il n'y a pas de solution !

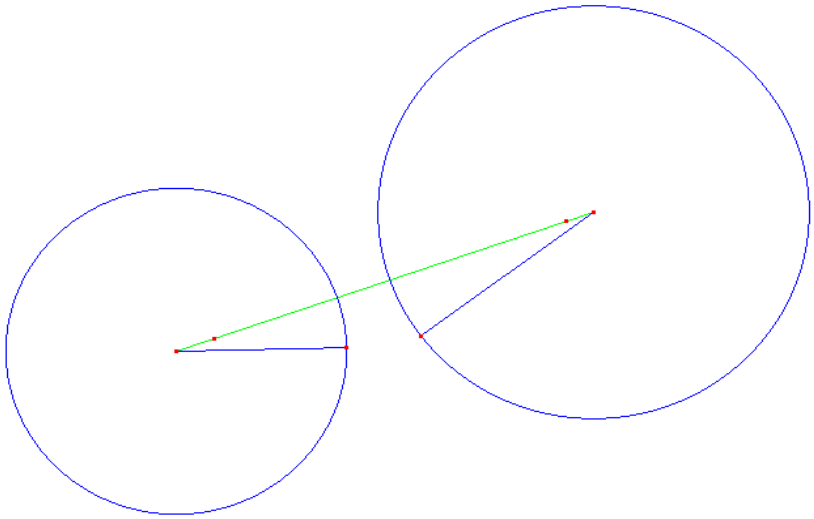


Figure représentant un problème sans solution

Vacherie intermédiaire n°2

Si on connaît les trois (mesures d') angles, il existe une infinité de solutions au problème (cf Thales) !

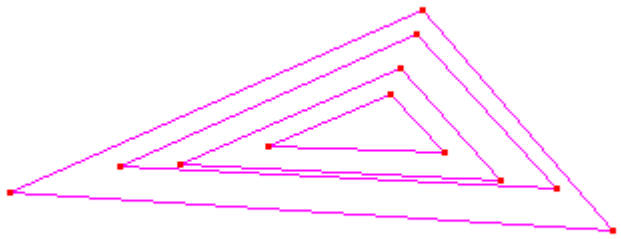


Figure représentant un problème avec une infinité de solution

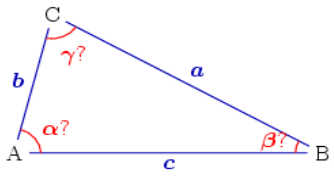
Deuxième vacherie

Dans d'autres cas de résolution de triangle, il peut y avoir une unique solution, deux solutions ... ou aucune. Ceci est lié à ce qu'on appelle les trois « cas d'isométrie des triangles », ou « cas d'égalité des triangles » : CôtéCôtéCôté (CCC), CôtéAngleCôté (CAC) et AngleCôtéAngle (ACA).

Cela signifie que si on connaît d'ans un triangle :

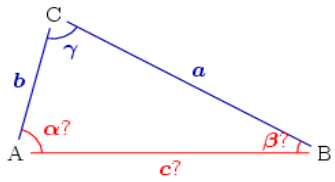
- ses trois côtés (CCC), ou
- un angle et les deux côtés adjacents (CAC), ou
- un côté et ses deux angles adjacents (ACA)

alors le triangle est entièrement déterminé du point de vue de ses autres côtés et angles : il n'y a qu'une solution lorsqu'on le résoud.



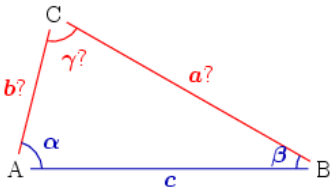
CCC

Thm du cosinus deux fois (par ex. pour trouver α et β) , puis thm sur la somme des angles dans un triangle



CAC

Thm du cosinus une fois (pour trouver c), puis thm du cos (par ex. pour trouver α), puis thm sur la somme des angles dans un triangle



ACA

Thm sur la somme des angles dans un triangle (pour trouver γ) puis thm du sinus deux fois (pour trouver a et b)

Par contre, si on connaît un angle, un côté adjacent et le côté opposé, il peut y avoir aucune, une ou deux solutions !

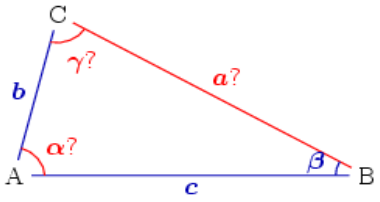
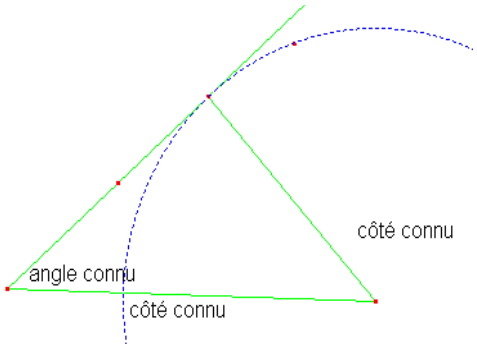
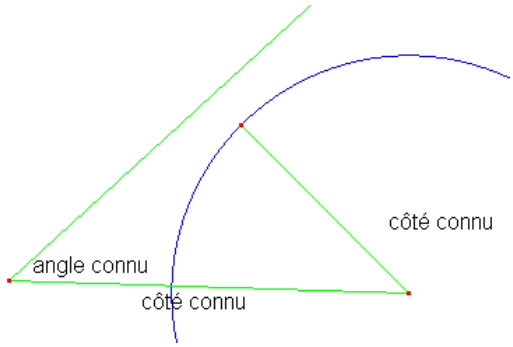
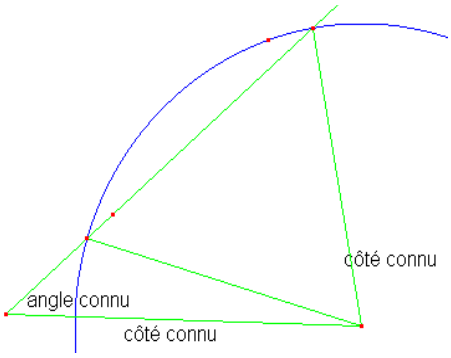


Illustration :







En haut à gauche : une solution

Ci-dessus : pas de solution

Ci-contre : deux solutions

Stratégie pour résoudre le triangle dans ce cas

- On utilise le théorème du cosinus avec la formule qui contient l'angle connu. On obtient alors une équation du deuxième degré à résoudre : elle aura 0,1 ou 2 solutions selon les cas ! On a alors 3 côtés et un angle.
- On utilise une nouvelle fois le théorème du cosinus pour trouver un autre angle, puis le théorème sur la somme des angles dans un triangle pour le dernier angle.

Remarque

On peut aussi préférer une stratégie alternative :

- utiliser le thm du sinus pour trouver un deuxième angle.
  La calculatrice ne fournira que la solution potentielle α située entre 0° et 90° !
  Il faut alors ajouter une deuxième solution potentielle : 180° - α
- traiter ensuite les deux cas séparemment; pour chacun des cas :
  - trouver le 3ème angle avec le théorème sur la somme des angles dans un triangle
  - trouver le dernier côté avec le théorème du cosinus
- enfin, il faut vérifier les deux solutions trouvées en utilisant le théorème du cosinus ou du sinus; on ne gardera que celle(s) qui sont correctes lors de cette vérification

Résolution correcte du problème en utilisant quand même le thm du sinus :

Thm sinus : $\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$, donc

$$\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{10{,}64}=\frac{\sin(40{,}14)}{7{,}1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha)=\frac{\sin(40{,}14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}$$

$$(\Leftrightarrow \quad \cong 0{,}96608)$$

$$\text{donc} \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(40.14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}\right)$$

Cas 1 : $\alpha \cong 75{,}03°$ et Cas 2 : $\alpha \cong 180 - 75{,}03 \cong 104{,}97°$

Il y a deux candidats solutions, mais on sait qu'il n'y a qu'une unique solution au problème car :

- la longueur du plus grand côté est bien inférieure à la somme des deux autres côtés
- on connaît 3 côtés, donc par cas d'isométrie CCC, la solution est unique

Cas 1 : $\beta \cong 180-75{,}03-40{,}14 \cong 69{,}83°$

Cas 2 : $\beta \cong 180-104{,}97-40{,}14 \cong 34{,}89°$

On vérifie en utilisant le théorème du cosinus ou du sinus dans les deux cas et on voit que la solution correcte est celle du cas 2.

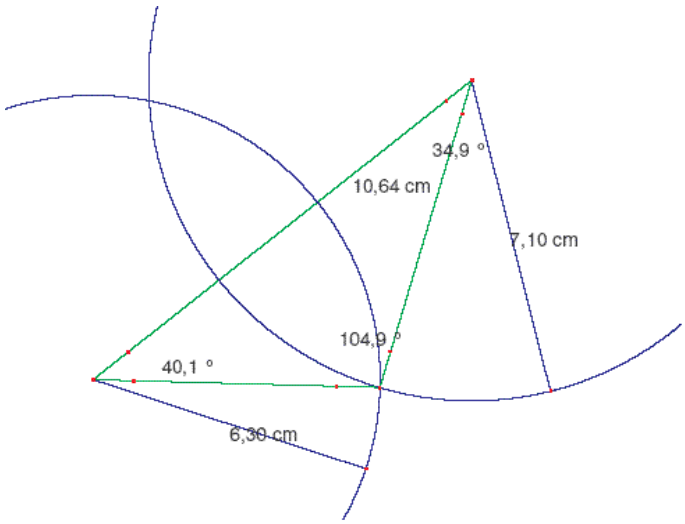


Figure représentant la solution du problème posé dans « Vacherie »

Remarque finale

Pour résoudre le triangle proposé dans cet exercice, il serait plus indiqué de continuer à utiliser le thm du cosinus pour déterminer α , on se serait épargné tous ces problèmes !