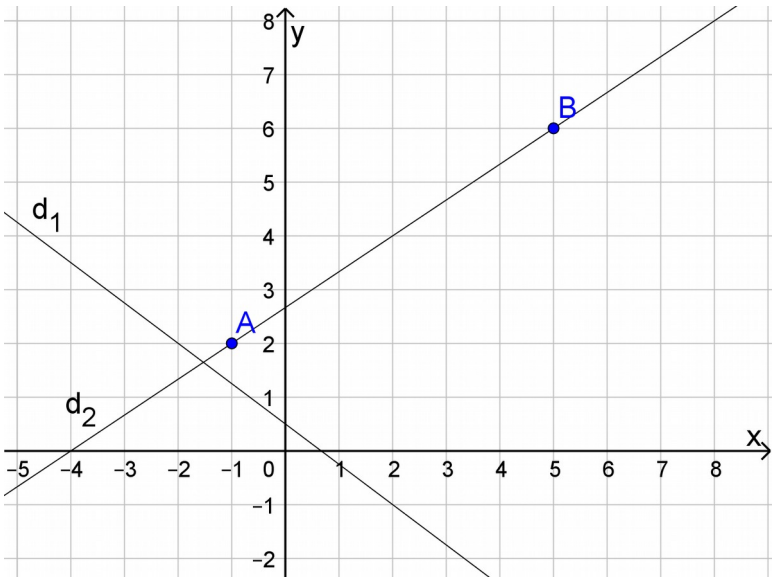
Exercice 1

(a) Pour représenter la droite d_1 il est possible de calculer deux solutions :

- Si $x=-2$ alors $3x+4y-2=0 \Leftrightarrow 3\cdot(-2)+4y-2=0 \Leftrightarrow y=2$ donc $C(-2;2)$ appartient à d_1.
- Si $x=2$ alors $3x+4y-2=0 \Leftrightarrow 3\cdot 2+4y-2=0 \Leftrightarrow y=-1$ donc $D(2;-1)$ appartient à d_1.

Pour représenter la droite d_1 il est aussi possible de considérer la pente et l'ordonnée à l'origine en déterminant l'équation réduite :

$$3x+4y-2=0 \Leftrightarrow 4y=-3x+2 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$$



(b) On cherche $d_2: y=ax+b$ avec a la pente et b l'ordonnée à l'origine (équation réduite).

$$a=\frac{6-2}{5-(-1)}=\frac{2}{3}$$

Puis on détermine b à partir d'un point :

$$A(-1;2)\in d_2 \Leftrightarrow 2=\frac{2}{3}\cdot(-1)+b \Leftrightarrow b=\frac{8}{3}$$

On a donc

$$d_2: y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \Leftrightarrow 3y=2x+8 \Leftrightarrow 2x-3y+8=0 \quad \text{(équation cartésienne)}$$

CC BY NC SA

(c) Il s'agit de résoudre le système suivant (par addition) :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 6 \\ 16x - 12y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 6 \\ 25x - 0y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 6 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\cdot\frac{2}{5} + 12y = 6 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Le point P d'intersection est donc $P\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$

(d) On cherche $d_4: y = ax + b$ avec a la pente et b l'ordonnée à l'origine (équation réduite).

Pour déterminer la pente a de la droite d_4 il faut :

- Commencer par déterminer la pente p de la droite d_3 :

$$4x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow -3y = -4x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \quad \text{et donc} \quad p = \frac{4}{3}$$

- Déterminer la pente a de la droite d_4 :

$a = -\frac{3}{4}$ par le théorème « droites perpendiculaires » ($a \cdot p = -1$).

- Déterminer b à partir du point $A(-1;2)$:

$$A(-1;2) \in d_4 \Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{4}\cdot(-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$$

On a donc :

$$d_4: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4y = -3x + 5 \Leftrightarrow -3x - 4y + 5 = 0$$

(équation cartésienne)

Exercice 2

(a) Il s'agit de résoudre les trois systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

- Résolution par substitution du premier système linéaire :

On isole x dans la première équation :

$$\begin{cases} x = 8 - 2y \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$$

Puis on substitue $x = 8 - 2y$ dans la deuxième équation :

CC BY NC SA

$$4(8-2y)+3y=7 \Leftrightarrow 32-8y+3y=7 \Leftrightarrow y=5$$

Puis on substitue $y=5$ dans une des équations :

$$x=8-2y \Leftrightarrow x=8-2\cdot 5 \Leftrightarrow x=-2$$

Le point d'intersection entre les droites d_1 et d_2 est donc

$$I_{d_1 \cap d_2}(-2;5)$$

- Résolution par substitution du deuxième système linéaire :

On isole x dans la première équation :

$$\begin{cases} x & & = & 8-2y \\ 3x & + & y & = & 9 \end{cases}$$

Puis on substitue $x=8-2y$ dans la deuxième équation :

$$3(8-2y)+y=9 \Leftrightarrow 24-6y+y=9 \Leftrightarrow y=3 \quad .$$

Puis on substitue $y=3$ dans une des équations :

$$x=8-2y \Leftrightarrow x=8-2\cdot 3 \Leftrightarrow x=2$$

Le point d'intersection entre les droites d_1 et d_3 est donc

$$I_{d_1 \cap d_3}(2;3)$$

- Résolution par addition du dernier système linéaire :

On multiplie la deuxième équation par -3 puis on additionne les deux équations.

$$\begin{cases} 4x & + & 3y & = & 7 \\ 3x & + & y & = & 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x & + & 3y & = & 7 \\ -9x & - & 3y & = & -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x & + & 3y & = & 7 \\ -5x & + & 0y & = & -20 \end{cases}$$

On obtient $x=4$ et donc

$$4x+3y=7 \Leftrightarrow 4\cdot 4+3y=7 \Leftrightarrow y=-3$$

Le point d'intersection entre les droites d_2 et d_3 est donc

$$I_{d_1 \cap d_3}(4;-3)$$

(b) Il est possible de calculer l'aire d'un triangle à partir uniquement de ses sommets $S_i(x_i;y_i)$ avec la formule suivante :

$$A=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|$$

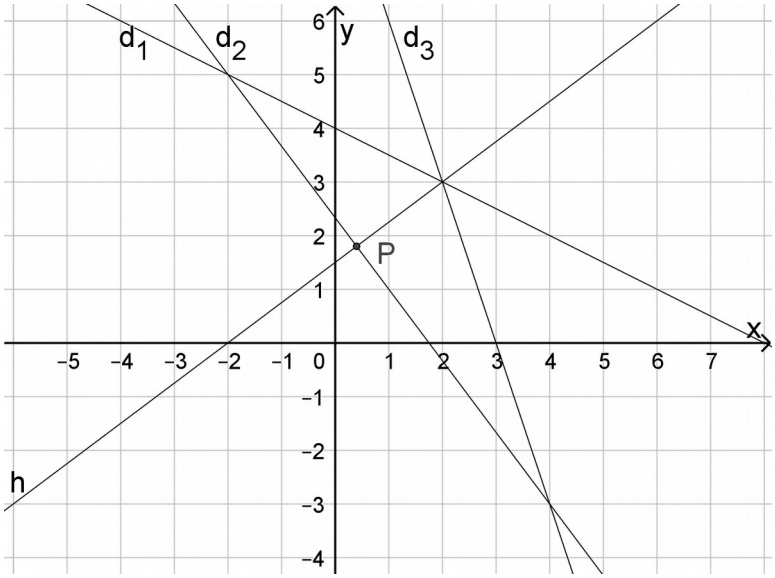
On obtient alors

$$A=\frac{1}{2}\left|(2-(-2))(3-5)-(4-(-2))(3-5)\right|=\frac{1}{2}\left|4\cdot(-2)-6\cdot(-2)\right|=10$$

Une autre solution consiste à représenter graphiquement les droites trois ainsi que la hauteur

CC BY NC SA

issue de $I_{d_1 \cap d_3}(2;3)$



Les coordonnées du point *P* sont nécessaires afin de calculer l'aire du triangle avec la formule usuelle (*base* x *hauteur* / 2).

La droite *h* est perpendiculaire à d_2 et contient le point $I_{d_1 \cap d_3}(2;3)$.

Son équation est alors $d_h: -3x + 4y = 6$ (sans détail).

Il est alors possible de calculer les distances $\overline{PI_{d_1 \cap d_3}} = 2$ et $\overline{I_{d_1 \cap d_2} I_{d_2 \cap d_3}} = 10$ avec la formule de Pythagore (sans détail) pour finalement obtenir $A = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10$

Exercice 3

(a) $x^2 - 3x = -4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$

Aucune factorisation ne semble évidente, on utilise donc la formule de Viète :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0 \quad \text{donc} \quad S = \emptyset$$

(b) $3x^2 = 6x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$

Aucune factorisation ne semble évidente, on utilise donc la formule de Viète :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 48 \quad \text{et} \quad \sqrt{(48)} = \sqrt{(4^2 \cdot 3)} = 4\sqrt{(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm 4\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \text{donc} \quad S = \{1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}; 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\}$$

(c) $3x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow S = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$

Exercice 4

(a) La factorisation n'est pas immédiate, on utilise donc la formule de Viète :

$$7x^2+5x-2=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot 7\cdot(-2)=81 \quad \text{et} \quad \sqrt{81}=9$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\pm 9}{2\cdot 7}\Leftrightarrow x_1=-1\,;\ x_2=\frac{2}{7} \quad \text{donc}$$

$$7x^2+5x-2=7(x+1)(x-\frac{2}{7})=(x+1)(7x-2)$$

(b)

$$\begin{aligned}&3(x-1)^2-9(x-1)= && \text{[mise en évid.]}\\ &3(x-1)[(x-1)-3]= && \text{[réduire]}\\ &3(x-1)[x-4]\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}&7a^3b^2c-14a^2b^2c^2+28ab^3= && \text{[mise en évid.]}\\ &7ab^2[a^2c-2ac^2+4b]\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}&(5x+4)(9x-5)-(12x+7)(5x+4)= && \text{[mise en évid.]}\\ &(5x+4)[(9x-5)-(12x+7)]= && \text{[réduire]}\\ &(5x+4)[9x-5-12x-7]= && \text{[réduire]}\\ &(5x+4)[-3x-12]= && \text{[mise en évid.]}\\ &-3(5x+4)[x+4]\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}&3(x-1)^2-9(x-1)= && \text{[mise en evid.]}\\ &3(x-1)[(x-1)-3]= && \text{[réduire]}\\ &3(x-1)[x-4]\end{aligned}$$

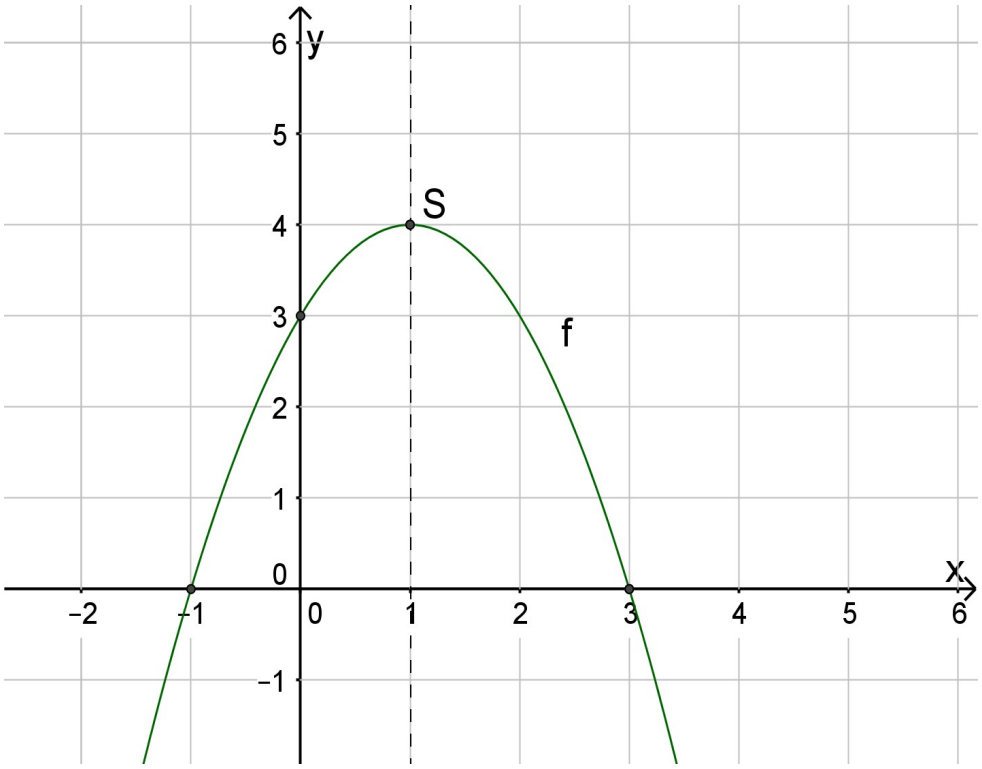
(f)

$$\begin{aligned}&x^2+5x-14= && \text{[id. n°4]}\\ &(x+7)(x-2)\end{aligned}$$

CC BY NC SA

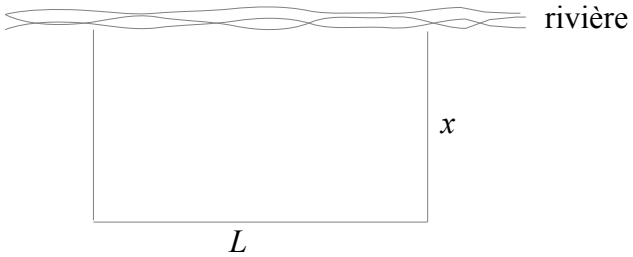
Exercice 5

$f(x)=-x^2+2x+3$ (forme développée)
$o.o=f(0)=3$
$Z_f: -x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow -(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow -(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow Z_f=\{-1;3\}$
équation de l'axe de symétrie : $x=-\frac{b}{2a}=1$
sommet : $S(1;f(1))=S(1;4)$
pt supp.: $f(-2)=-5$
pt sym.: $(4;-5)$ et $(2;3)$



Exercice 6

(a) Schéma :



On a $300=2x+L \Leftrightarrow L=300-2x$

Comme $x\geq 0$ et $L\geq 0$ on a $L\in[0;300]$ et $x\in[0;150]$

(b) On souhaite maximiser l'aire : $A(x;L)=x\cdot L$

Comme $L=300-2x$ on a :

$$A(x)=x(300-2x)=-2x^2+300x$$

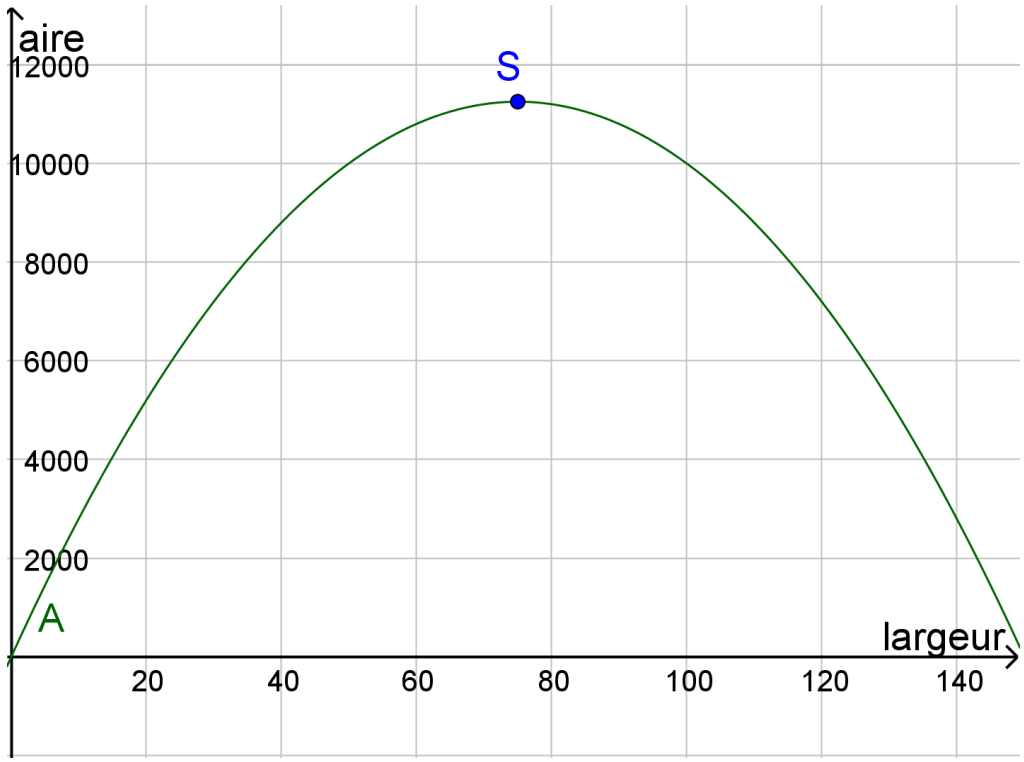
(c) La fonction *A(x)* est maximale en son sommet car la parabole est concave ($a=-2<0$).

On détermine le sommet avec le théorème du sommet :

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{300}{2\cdot(-2)}=75 \quad \text{et} \quad A(75)=11250 \quad \text{donc} \quad S(75;11250) \quad .$$

L'aire est maximale lorsque la largeur mesure 75 mètres, l'aire est alors de 11250 mètres carrés et la longueur de 150 mètres.

(d)



Exercice 7

Sur le graphique, on lit $S(-1;-3)$ et $P(0;-1)$

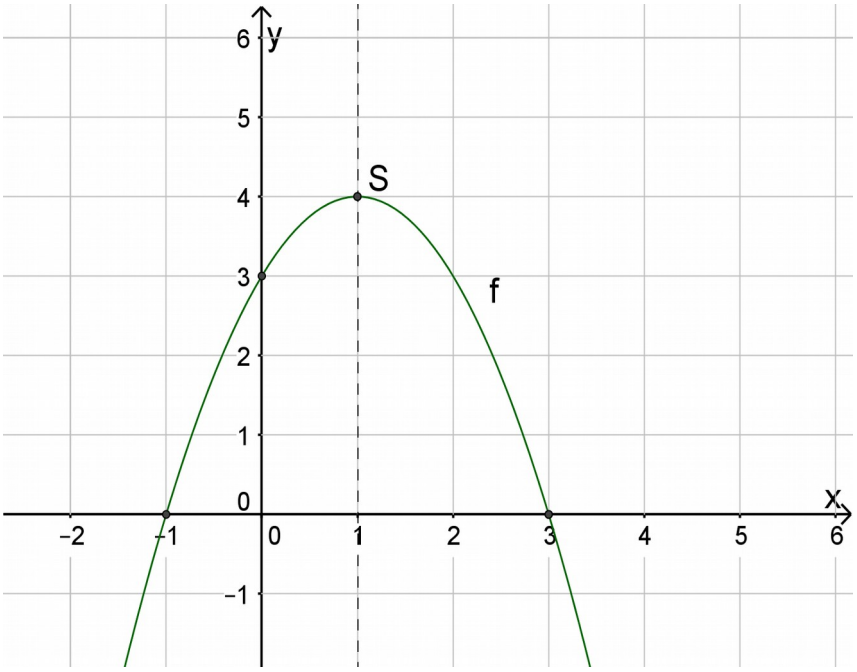
- Comme le sommet est connu, on commence par déterminer la forme canonique :

$$f(x)=a(x-k)^2+m=a(x-(-1))^2-3=a(x+1)^2-3$$
$$f(0)=-1 \Leftrightarrow a(0+1)^2-3=-1 \Leftrightarrow a-3=-1 \Leftrightarrow a=2$$
donc : $f(x)=2(x+1)^2-3$

- On peut alors déterminer la forme développée :

$$f(x)=2(x+1)^2-3=2(x^2+2x+1)-3=2x^2+4x+2-3=2x^2+4x-1$$

- Pour trouver la forme factorisée, il faut commencer par déterminer les zéros :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2-3=0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3 \Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{3}{2} \Leftrightarrow (x+1)=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\Leftrightarrow x_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Donc $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=2(x+1-\frac{\sqrt{6}}{2})(x+1+\frac{\sqrt{6}}{2})$