MA2 | CH2 Corrigés des exercices

ex 1

$$\frac{3P}{7} = \frac{9}{7}x^7 - \frac{6}{7}x^6 + \frac{3}{7}x^5 - \frac{9}{7}$$

$$-3Q = -3x^7 - 3x^6 + 6$$

$$P \cdot Q = 3x^{14} + x^{13} - x^{12} + x^{11} - 9x^7 + x^6 - 2x^5 + 6$$

$$P - 3Q = -5x^6 + x^5 + 3$$

ex 2

$d^\circ(P) = 2+1 = 3$

$d^\circ(Q) = 1+2 = 3$

$d^\circ(PQ) = d^\circ(P) \cdot d^\circ(Q) = 3 \cdot 3 = 9$

$P+Q = (1-2x+x^2)(x+3) + (2x+6)(x^2+1) = x^3 + \dots + 2x^3 + \dots$

$\Rightarrow d^\circ(P+Q) = 3$

ex 3

a) vrai ; $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de degré 3 $(a \neq 0)$

$Q(x) = ex^2 + f$ de degré 2 $(e \neq 0)$

d'où $P(x) + Q(x) = ax^3 + (b+e)x^2 + \dots$ de degré 3

b) vrai ; $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de degré 3 $(a \neq 0)$

d'où $[P(x)]^3 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^3 = a^3x^9 + \dots$ de degré 9

c) faux ; contre-exemple $P(x) = x^4$ et $Q(x) = -x^4 + 1$

d'où $P(x) + Q(x) = x^4 + (-x^4 + 1) = 1$

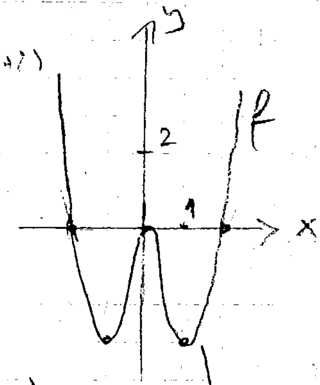
de degré 0

ex 4

a) $f(x) = x^2(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$

x		-2		0		2	
x^2	+	+	+	0	+	+	+
x^2-4	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

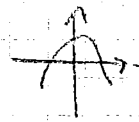
$f(1)=-3$
$f(-1)=-3$
$f(3)=45$



$f(x)>0$: $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

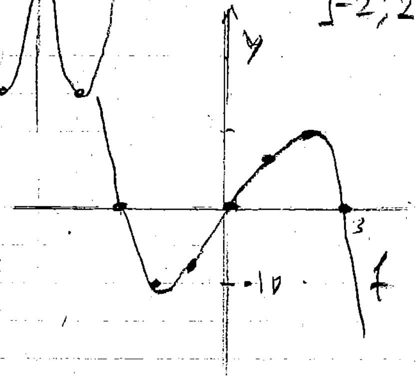
$f(x)<0$: $]-2;2[\setminus\{0\}$

b) $f(x) = x(9-x^2) = x(3-x)(3+x)$



		-3		0		3	
x	−	−	−	0	+	+	+
$9-x^2$	−	0	+	+	+	0	−
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−

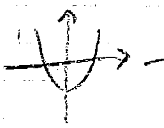
$f(1)=8$
$f(-1)=-8$
$f(2)=10$



$f(x)>0 :]-3;0[\cup]3;+\infty[$

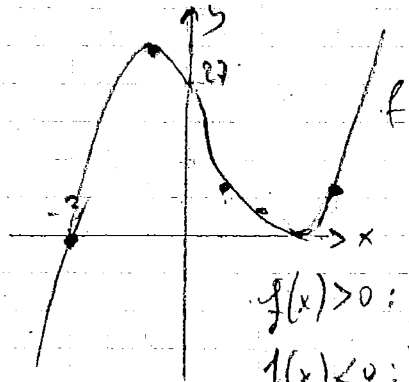
$f(x)<0 :]-\infty;-3[\cup]0;3[$

c) $f(x) = x^2(x-3) - 9(x-3)$
$= (x-3)(x^2-9) = (x-3)^2(x+3)$



x		-3		3	
$x-3$	−	−	−	0	+
x^2-9	+	0	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	0	+

$f(0)=27$
$f(1)=8$
$f(2)=5$
$f(4)=7$
$f(-1)=32$



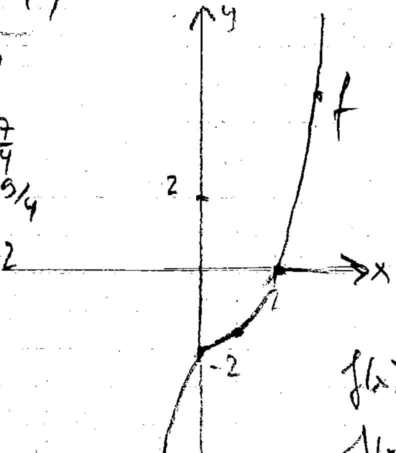
$f(x)>0 :]-3;+\infty[\setminus\{3\}$

$f(x)<0 :]-\infty;-3[$

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x^3-8) = \frac{1}{4}(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}_{\Delta<0}$

x		2	
$\frac{1}{4}(x-2)$	−	0	+
x^2+2x+4	+	+	+
$f(x)$	−	0	+

$f(1)=-\frac{7}{4}$
$f(3)=19/4$
$f(0)=-2$



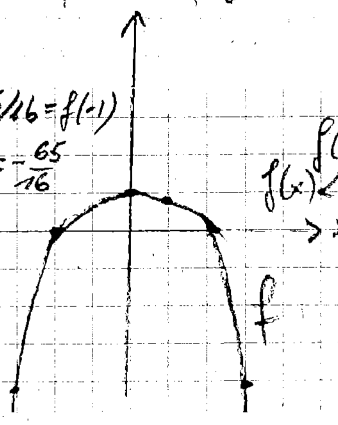
$f(x)>0 :]2;+\infty[$

$f(x)<0 :]-\infty;2[$

e) $f(x) = 1-\frac{1}{16}x^4 = (1+\frac{1}{4}x^2)(1+\frac{1}{2}x)(1-\frac{1}{2}x)$

x		-2		2	
$1+\frac{1}{4}x^2$	+	+	+	+	+
$1+\frac{1}{2}x$	−	0	+	+	+
$1-\frac{1}{2}x$	+	+	+	0	−
$f(x)$	−	0	+	0	−

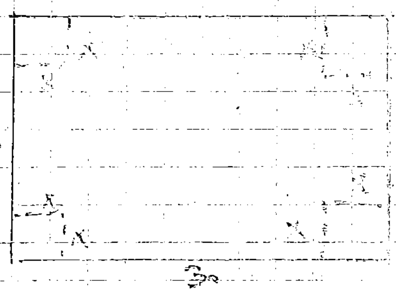
$f(1)=15/16=f(-1)$
$f(3)=f(-3)=-\frac{65}{16}$

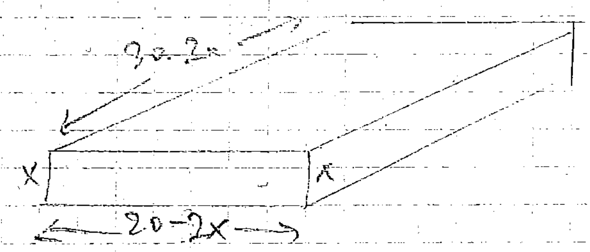


$f(x)>0 :]-2;2[$

$f(x)<0 : \mathbb{R}\setminus[-2;2]$

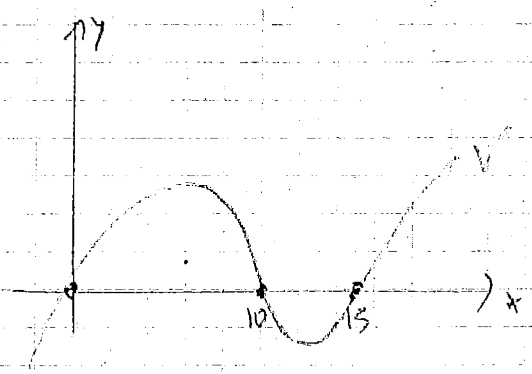
ex 5





a) $V(x) = x(30-2x)(20-2x)$

b)



x		0		10		15	
x	−	0	+	+	+	+	+
$20-2x$	+	+	+	0	−	−	−
$30-2x$	+	+	+	+	+	0	−
$V(x)$	−	0	+	0	−	0	+

$V(x) \geq 0 : \ ]0;10] \cup]15,+\infty[$

$D_{V app} : \ ]0;10[$

ex6 $T(t) = \frac{1}{20}t(t-12)(t-24)$

a)

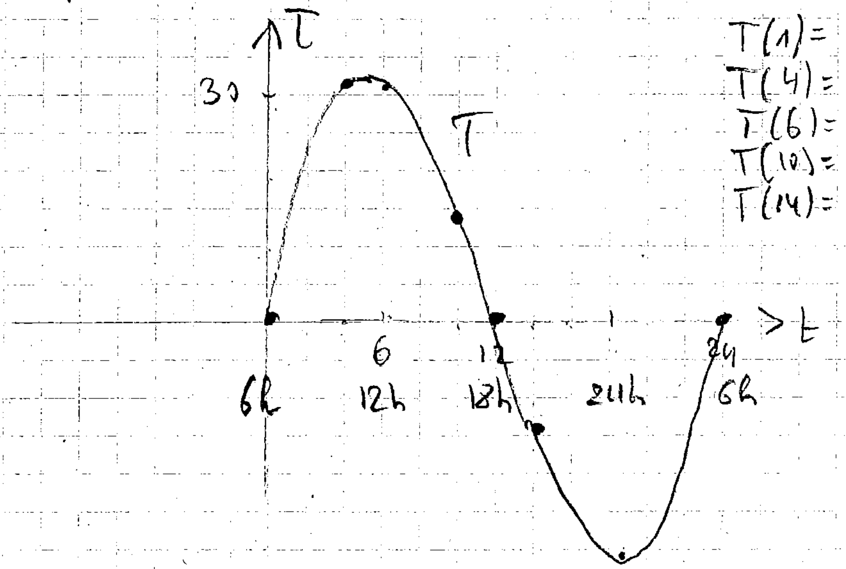
t		0		12		24	
$\frac{1}{20}t$	−	0	+	+	+	+	+
$t-12$	−	−	−	0	+	+	+
$t-24$	−	−	−	−	−	0	+
$T(t)$	−	0	+	0	−	0	+

$T > 0 \Leftrightarrow t \in]0;12[\cup]24;+\infty[$

$T < 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty;0[\cup]12;24[$

(en fait $T_{min} = -273°K$!)

b)



$T(1) = 12,65$
$T(4) = 32$
$T(6) = 32,4$
$T(10) = 14$
$T(14) = -14$
$T(19) = -33,25$

cf table de la calculatrice !

c) $T(\text{midi}) = T(6) = 32,4$

$T(13^h) = T(7) = 29,75$

donc [la fonction étant continue], il a bien fait 32°F entre midi et 13h

ex 7

a. $q(x) = 2x^2 - 3x - 1$; $r(x) = -4$

b. $q(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$; $r(x) = 0$

c. $q(x) = -3x^3 + x^2 - 2x + 5$; $r(x) = 27$

d. $q(x) = x^2 - 1$; $r(x) = 2x - 1$

e. $q(x) = 6x - 5$; $r(x) = -\frac{4}{3}$

f. $q(x) = 2{,}1x^2 - 0{,}7x + 0{,}4$; $r(x) = 0$

ex 8

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$
$$= (x^2 - x + 1)(2x^2 + 1) + (x - 1)$$
$$= 2x^4 - 2x^3 + 3x^2$$

ex 9

$f(-4) = (-4)^3 - 2\cdot(-4)^2 - 2\cdot(-4) - 3 = -64 - 32 + 8 - 3 = -91$

$f(-4) \neq 0$ donc f n'est pas divisible par $x + 4$.

ex 10

$f(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1 + 4 - 4 + 1 = 0$

$f(-1) = 0$ donc f est divisible par $x + 1$.

$$\begin{array}{rr|l}
x^3 + 4x^2 + 4x + 1 & & x + 1 \\ \cline{3-3}
-(x^3 + x^2) & & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{1-1}
3x^2 + 4x & & \\
-(3x^2 + 3x) & & \\ \cline{1-1}
x + 1 & & \\
-(x + 1) & & \\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

Donc $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x+1)(x^2 + 3x + 1)$

factorisation de $x^2 + 3x + 1$: $\Delta = 3^2 - 4\cdot1\cdot1 = 5$ $\quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

d'où $x^2 + 3x + 1 = \left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Finalement $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x+1)\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Exercice 11

D'après le théorème du diviseur, $P(x)$ peut s'écrire $P(x) = a(x+2)(x-1)(x-3)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

Ainsi, $P(-2) = P(1) = P(3) = 0$. La condition $P(-1) = 16$ permet de déterminer a :

$16 = P(-1) = a \cdot (-1+2)(-1-1)(-1-3) = a \cdot 1 \cdot (-2)(-4) = 8a$

$\Rightarrow 16 = 8a \Rightarrow a = 2$ Il suit que

$$\boxed{P(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3)}$$

Exercice 12

a) D'après le théorème du reste, le reste R de la division de $x^3 + ax - 5$ par $x-1$ est

$R = (1)^3 + a \cdot 1 - 5 = 1 + a - 5 = a - 4$

Ainsi $R = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 4}$.

b) Identiquement, $R = 3(2)^4 - a \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 - 2 \cdot a \cdot 2 - 20$

$R = 3 \cdot 16 - 8a + 8 \cdot 4 - 4 \cdot a - 20 = 48 - 12a + 32 - 20$

$R = 60 - 12a$ Ainsi, $R = 0 \Leftrightarrow 60 - 12a = 0$

$\Leftrightarrow 60 = 12a \Leftrightarrow a = \frac{60}{12} = 5$ $R = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 5}$

c) Remarquons que $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

Ainsi, $x^3 + ax^2 + bx + 6$ est divisible par $x^2 - 5x + 6$ s'il est divisible par $x-3$ et $x-2$.

Or $x^3 + ax^2 + bx + 6$ est divisible par $x-3$ si (th. reste)

$3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 6 = 0$ (1)

et $x^3 + ax^2 + bx + 6$ est divisible par $x-2$ si (th. reste)

$2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 6 = 0$ (2)

① et ② forment un système d'équations à résoudre:

$$\begin{cases} ①: 9a + 3b = -33 \\ ②: 4a + 2b = -14 \end{cases} \quad \begin{Vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{Vmatrix} \quad \begin{array}{r} 18a + 6b = -66 \\ -12a - 6b = 42 \\ \hline 6a \qquad = -24 \end{array}$$

$\Rightarrow a = \frac{-24}{6} = -4$

et par ②: $4 \cdot (-4) + 2b = -14 \Rightarrow -16 + 2b = -14$

$\Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$

Ainsi, $x^3 + ax^2 + bx + 6$ est divisible par $x^2 - 5x + 6$ si

$\underline{a = -4}$ et $\underline{b = 1}$.

<u>Exercice 13</u>

Par le théorème du diviseur $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ est divisible par $x - c$ si et seulement si $f(c) = 0$.

Or $f(c) = \underbrace{3 \cdot c^4}_{\geq 0} + \underbrace{c^2}_{\geq 0} + \underbrace{5}_{> 0} > 0$ est strictement positif (i.e. jamais nul) car $f(c)$ est une somme de terme positif et $+5$ est strictement positif.

Ainsi, par la contraposée du théorème du diviseur, nous pouvons conclure que $f(x)$ n'est pas divisible par $x - c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 14</u>,

Vrai, par le théorème du diviseur $f(x) = x^n - y^n$ est divisible par $x - y$ si $f(y) = 0$, or $f(y) = y^n - y^n = 0$.

ex 15 a) $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$

on cherche un zéro entier parmi les diviseurs de $2 = \{\pm 1 ; \pm 2\}$

$P(1) = \dots = 0$, donc $x-1 \mid P(x)$

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^2 - 5x + 2 & x-1 \\ \cline{3-3} - & 3x^2 - 3x & 3x-2 \\ \cline{2-2} & -2x+2 & \\ - & -2x+2 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

d'où $P(x) = (x-1)(3x-2)$

b) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

On recherche un zéro rationnel de $P(x)$.

Par le théorème sur les zéros d'un polynôme à coefficients entiers vu en cours, si p/q est un zéro rationnel de $P(x)$, alors p est un diviseur de -6 et q est un diviseur de 1.

Donc les zéros rationnels de $P(x)$ ne peuvent être trouvés que parmi les nombres :

± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6

Rem : On constate que si x est négatif, alors $P(x)$ est négatif. Donc il est inutile de tester les nombres négatifs !

Méthode 1 :

Rappel : un polynôme de degré 3 ne peut pas avoir plus de 3 zéros.

On teste tous les nombres pour essayer de trouver 3 zéros...

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ donc 1 est un zéro de P => P est divisible par $(x-1)$

$P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$ donc 2 est un zéro de P => P est divisible par $(x-2)$

$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$ donc 3 est un zéro de P => P est divisible par $(x-3)$

Par conséquent, **la factorisation est : $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$**

Méthode 2 :

On cherche un 1er zéro de $P(x)$, puis on effectue une division polynômiale. On obtient ainsi le quotient, qu'il faut ensuite factoriser..

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ donc 1 est un zéro de P => P est divisible par $(x-1)$

Le quotient de la division polynômiale est : $x^2 - 5x + 6$, qu'on peut factoriser en $(x-2)(x-3)$.

Par conséquent, **la factorisation est : $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$**

c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x \cdot (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$

Un zéro évident de $P(x)$ est 0.

On note alors $P'(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ et on cherche un zéro rationnel de $P'(x)$.

Par le théorème vu en cours, si p/q est un zéro rationnel de $P'(x)$, alors p est un diviseur de -6 et q est un diviseur de 1.

Donc les zéros rationnels de $P'(x)$ ne peuvent être trouvés que parmi les nombres :

± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6.

Méthode 1 :

Rappel : un polynôme de degré 4 ne peut pas avoir plus de 4 zéros.

On teste tous les nombres pour essayer de trouver les 3 zéros restants...

$P'(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = -8$ donc 1 n'est pas un zéro de P'

$P'(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$ donc -1 est un zéro de P' => P' est divisible par $(x+1)$

$P'(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$ donc 2 est un zéro de P' => P' est divisible par $(x-2)$

$P'(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$ donc -3 est un zéro de P' => P' est divisible par $(x+3)$

Par conséquent, **la factorisation est : $P(x) = x(x+1)(x-2)(x+3)$**

Méthode 2 :

On cherche un zéro de $P'(x)$, puis on effectue une division polynômiale. On obtient ainsi le quotient, qu'il faut ensuite factoriser..

$P'(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$ donc -1 est un zéro de P' => P' est divisible par $(x+1)$

Le quotient de la division polynômiale est $x^2 + x - 6$ qu'on peut factoriser en $(x-2)(x+3)$.

Par conséquent, **la factorisation est : $P(x) = x(x+1)(x-2)(x+3)$.**

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

On recherche un zéro rationnel de $P(x)$.

Par le théorème vu en cours, si p/q est un zéro rationnel de $P(x)$, alors p est un diviseur de -2 et q est un diviseur de 1.

Donc les zéros rationnels de $P(x)$ ne peuvent être trouvés que parmi les nombres : ±1 ; ±2

On teste tous les nombres pour essayer de trouver 3 zéros :

$P(1) = 1 - 3 + 3 - 2 = -1$ donc 1 n'est pas un zéro de P

$P(-1) = -1 - 3 - 3 - 2 = -9$ donc -1 n'est pas un zéro de P

$P(2) = 8 - 12 + 6 - 2 = 0$ donc 2 est un zéro de P => P est divisible par $(x-2)$

$P(-2) = -8 - 12 - 6 - 2 = -28$ donc -2 n'est pas un zéro de P

On a essayé toutes les possibilités et on n'a trouvé qu'un seul zéro rationnel pour $P(x)$. (Donc il n'y a pas d'autre zéro rationnel, MAIS il se peut que 2 soit un zéro triple, ou bien, il se peut que $P(x)$ ait un seul zéro, ou bien, il peut y avoir des zéros irrationnels !)

On effectue alors la division de $P(x)$ par $(x-2)$ pour trouver le quotient.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 3x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-(x^3 - 2x^2) \quad\quad\quad & x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 3x \quad\; & \\
-(-x^2 + 2x) \quad\; & \\ \cline{1-1}
x - 2 & \\
-(x-2) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On essaye de factoriser le quotient $Q(x) = x^2 - x + 1$ obtenu :

Viète : $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3 < 0$ => $Q(x)$ n'a pas de zéro.

Par conséquent, **la factorisation est : $P(x) = (x-2)(x^2-x+1)$**

e) $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

On recherche un zéro rationnel de $P(x)$.

Par le théorème vu en cours, si p/q est un zéro rationnel de $P(x)$, alors p est un diviseur de -4 et q est un diviseur de 6.

Donc les zéros rationnels de $P(x)$ ne peuvent être trouvés que parmi les nombres :

p/q	1	2	4
1	± 1	± 2	± 4
2	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \cancel{\frac{2}{2}}$	$\pm \cancel{\frac{4}{2}}$
3	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{2}{3}$	$\pm \frac{4}{3}$
6	$\pm \frac{1}{6}$	$\pm \cancel{\frac{2}{6}}$	$\pm \cancel{\frac{4}{6}}$

(on trace les nombres qui se répètent pour ne pas les tester 2x)

$P(2) = 0$ donc 2 est un zéro de P

$P(-2) = 0$ donc -2 est un zéro de P

Pour trouver les autres zéros éventuels, on peut continuer à essayer les nombres restants (ce qui peut être fastidieux) ou bien effectuer une division polynomiale…

Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-2)$ et par $(x+2)$, donc aussi par $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$.
Après avoir fait la division de $P(x)$ par $x^2 - 4$, on trouve le quotient $6x^2 - 5x + 1$.

Avec Viète : $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$ zéros : $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$ d'où $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$

Par conséquent, **la factorisation est : $P(x) = (x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$.**

f) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$

Les zéros rationnels de $P(x)$ ne peuvent être trouvés que parmi les nombres :

p/q	1	3	5	9	15	45
1	± 1	± 3	± 5	± 9	± 15	± 45
2	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{3}{2}$	$\pm \frac{5}{2}$	$\pm \frac{9}{2}$	$\pm \frac{15}{2}$	$\pm \frac{45}{2}$

$P(1) = 0$

$P(-3) = 0$

$P(5) = 0$

$P(-3/2) = 0$

La factorisation est : $P(x) = (x-1)(x+3)(x-5)(2x+3)$.

x16

a. Les zéros rationnels doivent se trouver parmi $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4$
aucun n'annule f

b. L'unique zéro réel est proche de 1,151.

17

a. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$
b. $f(x) = (x+5)(x-7)(x^2+1)$
c. $f(x) = (x-4)^2(x^2+x+1)$
d. $f(x) = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

x18

a) $f(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 2 = -2 < 0$
$f(4) = 4^3 - 4\cdot 4^2 + 3\cdot 4 - 2 = 10 > 0$
Comme f change de signe entre 3 et 4, il existe donc au moins un nombre c entre 3 et 4 tel que $f(c)=0$.

b) $f(2) = -2^4 + 3\cdot 2^3 - 2\cdot 2 + 1 = 5 > 0$
$f(3) = -3^4 + 3\cdot 3^3 - 2\cdot 3 + 1 = -5 < 0$
Comme f change de signe entre a et b, il existe donc au moins un nombre c entre 2 et 3 tel que $f(c)=0$.

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$
$f(-1) = (-1)^5 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 < 0$
Comme f change de signe entre a et b, il existe donc au moins un nombre c entre -1 et $-\frac{1}{2}$ tel que $f(c)=0$.

ex 19

$f(x) = 12x^4 + 16x^3 + x^2 - 4x - 1$

candidats zéros entiers : $\{\pm 1\}$

$f(1) \neq 0$, mais $f(-1) = 0$, donc on divise par $(x+1)$

$$
\begin{array}{r|l}
12x^4 + 16x^3 + x^2 - 4x - 1 & x+1 \\
\hline
-\left(12x^4 + 12x^3\right) \qquad\qquad\qquad & 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 \\
4x^3 + x^2 - 4x - 1 & \\
-\left(4x^3 + 4x^2\right) \qquad\quad & \\
-3x^2 - 4x - 1 & \\
-\left(-3x^2 - 3x\right) \quad & \\
-x - 1 & \\
-\left(-x - 1\right) & \\
0 &
\end{array}
$$

donc $f(x) = \underbrace{(12x^3 + 4x^2 - 3x - 1)}_{g(x)}(x+1)$

Candidats rationnels pour $g(x)$: $\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{6}; \pm\frac{1}{12}\}$

On essaye ... et on trouve $g(\frac{1}{2}) = 0$

on divise par $(x - \frac{1}{2})$, ou plus simple par $(2x-1)$:

$$
\begin{array}{r|l}
12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 & 2x-1 \\
\hline
-\left(12x^3 - 6x^2\right) \qquad\qquad & 6x^2 + 5x + 1 \\
10x^2 - 3x - 1 & \\
-\left(10x^2 - 5x\right) \quad & \\
2x - 1 & \\
-\left(2x - 1\right) & \\
0 &
\end{array}
$$

donc $g(x) = (6x^2 + 5x + 1)(2x-1)$

et $f(x) = \underbrace{(6x^2 + 5x + 1)}_{h(x) \text{ est de degré } 2}(2x-1)(x+1)$: $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{12}$ $\nearrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $\searrow x_2 = -\frac{1}{3}$

donc $h(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$= 6\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{3x+1}{3}\right)$

$= (2x+1)(3x+1)$

Enfin : $f(x) = (2x+1)(3x+1)(2x-1)(x+1)$

Exercice 21,

a) D'après le théorème sur les zéros rationnels, si $f(x)=x^4+4$ a des zéros rationnels, ils sont de la forme $\frac{c}{d}$ avec $c \in div(4)=\{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$ et $d \in div(1)=\{\pm 1\}$.

$d \backslash c$	± 1	± 2	± 4
± 1	± 1	± 2	± 4

Après vérification numérique, $f(x)$ n'a pas de zéro rationnel

b) Non les polynômes de degré 4 sont toujours factorisables. Ce n'est pas le cas des polynômes de degré 2

c) $$f(x) = x^4+4 = \overbrace{x^4+4x^2+4}^{(x^2+2)^2} - 4x^2$$

$$= (x^2+2)^2 - 4x^2 \quad \text{de la forme } a^2+b^2=(a-b)(a+b)$$

$$= ((x^2+2)-2x)((x^2+2)+2x)$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2-2x+2)}_{\text{non factorisable car } \Delta<0}\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{idem}}$$

Exercice 22,

a) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

On applique le théorème des zéros rationnels:

$c \in div\{24\} = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; \pm 6 ; \pm 12 ; \pm 24\}$

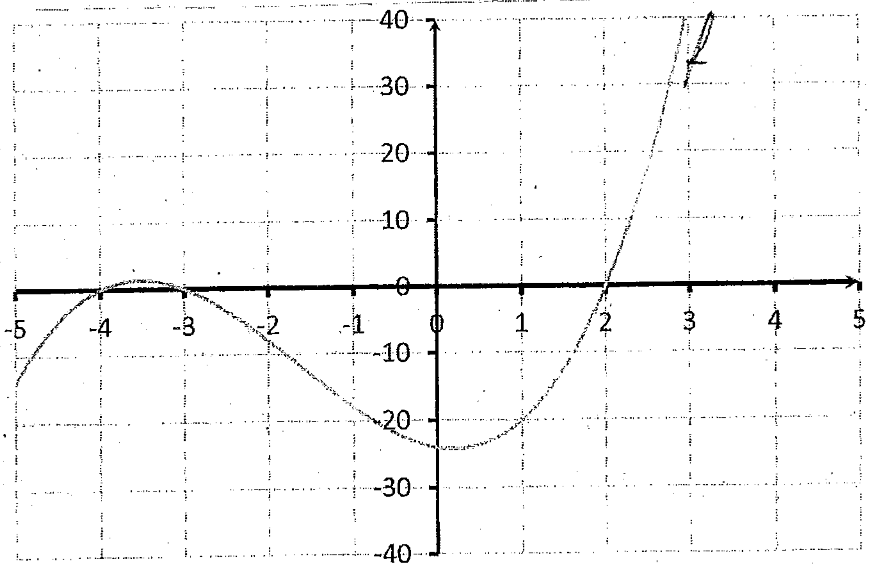
$d \in div\{1\} = \{\pm 1\}$.

On cherche donc les zéros parmi les diviseurs de $\frac{24}{1}$.

On remarque $f(2) = f(-3) = f(-4) = 0 \Rightarrow Z_f = \{-4 ; -3 ; 2\}$

Ainsi $f(x) = (x-2)(x+3)(x+4)$ (On a 3 zéros et f est de degré 3)

x		-4		-3		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



b) $g(x) = 6x^4+5x^3-17x^2-6x = x\cdot\underbrace{(6x^3+5x^2-17x-6)}_{j(x)}$

On applique le théorème des zéros rationnels sur $j(x)$: $c \in div(-6) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$

$d \in div(6) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$

$d \backslash c$	± 1	± 2	± 3	± 6
± 1	± 1	$\boxed{\pm 2}$	± 3	± 6
± 2	$\pm\frac{1}{2}$	$\cancel{\pm 1}$	$\boxed{\pm\frac{3}{2}}$	$\cancel{\pm 3}$
± 3	$\boxed{\pm\frac{1}{3}}$	$\pm\frac{2}{3}$	$\cancel{\pm 1}$	$\cancel{\pm 2}$
± 6	$\pm\frac{1}{6}$	$\cancel{\pm\frac{1}{3}}$	$\cancel{\pm\frac{1}{2}}$	$\cancel{\pm 1}$

On trouve

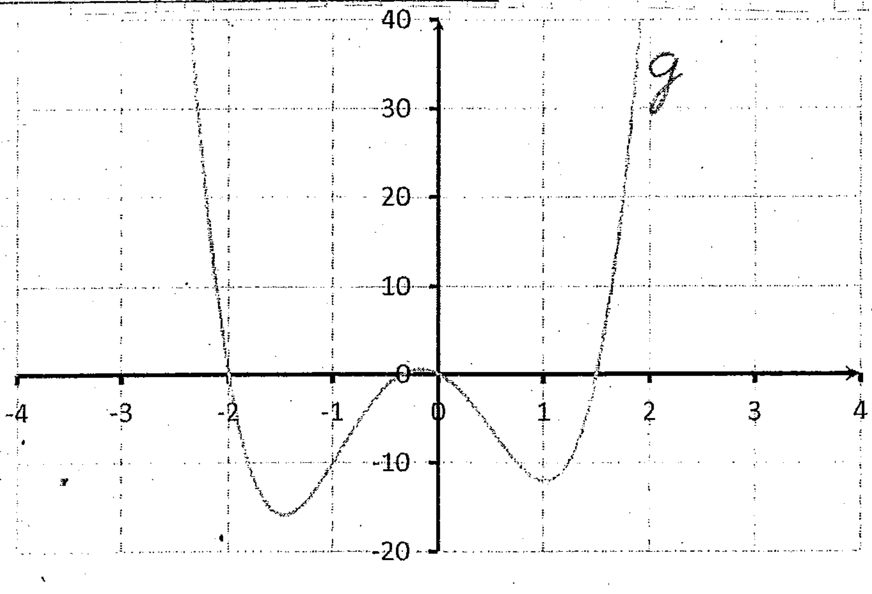
$Z_g = \left\{-2 ; -\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{3}{2}\right\}$

(On a trouvé 4 zéros et g est de degré 4 ⇒ on les a tous !)

Ainsi : $g(x) = 6x\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$g(x) = x\,(3x+1)(x+2)(2x-3)$

x		-2		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{3}{2}$	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



c) $h(x) = 3x^3 - x^2 + 11x - 20$

Identiquement $c \in div(-20) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20\}$
et $d \in div(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

On remarque $h\left(\frac{4}{3}\right) = 0$. Nous n'avons pas trouvé d'autres zéros rationnels, mais h pourrait avoir des zéros irrationnels. Il est donc nécessaire de faire la division polynomiale :

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 - x^2 + 11x - 20 & x - \frac{4}{3} \\
\underline{-(3x^3 - 4x^2)} & \overline{3x^2 + 3x + 15} \\
/ \quad 3x^2 + 11x - 20 & \\
\underline{-(3x^2 - 4x)} & \\
/ \quad 15x - 20 & \\
\underline{\quad 15x - 20} & \\
/ &
\end{array}$$

$$\Rightarrow h(x) = \left(x - \frac{4}{3}\right)(3x^2 + 3x + 15)$$

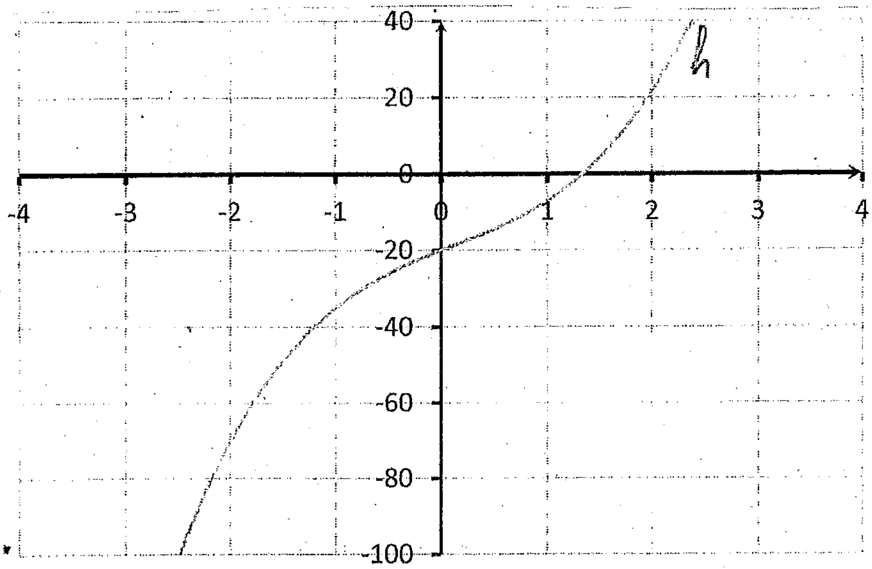
$$h(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x^2 + x + 5)$$

$$h(x) = (3x - 4)(x^2 + x + 5)$$

$h(x)$ a deux autres zéros si l'équation $x^2 + x + 5 = 0$ a une solution.

Or, le discriminant de cette équation est $\Delta = -19 < 0$
Donc $h(x)$ possède un seul zéro. $Z_h = \{4/3\}$

x		$4/3$	
$3x-4$	$-$	0	$+$
x^2+x+5	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$



20

a. $(x+1)^2(x-1)(x-3)$

b. $3(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{3}\right)$

23

a. $f(x) = -(x-1)(x+1)$

b. $f(x) = -2(x+1)(x-1)(x-2)$

24

a. $f(x) = (x-1)^3$ un zéro : 1 de multiplicité 3 $\rightarrow$ courbe rouge

b. $g(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$: trois zéros $-1, 0, 1$ de multiplicité 1 $\rightarrow$ courbe bleue

c. $h(x) = x(x+1)^2$ deux zéros : 0 de multiplicité 1, -1 de multiplicité 2 $\rightarrow$ courbe verte

x25 a) $P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 2x - 3$.

Ici $a_0 = -3$ et $a_4 = 4$

On recherche donc numériquement (avec la calculatrice) les zéros rationnels de $P(x)$ parmi les fractions construite à partir des diviseurs entiers de a_0 et a_4.
(Théorème des zéros rationnels)

$div(-3) = \{\pm 3 ; \pm 1\}$

$div(4) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$

$d \backslash c$	± 1	± 3
± 1	$\boxed{\pm 1}$	± 3
± 2	$\boxed{\pm \frac{1}{2}}$	$\boxed{\pm \frac{3}{2}}$
± 4	$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{3}{4}$

On trouve que $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

Donc $P(x)$ est divisible par $(x+1)$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ et $\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 2x - 3 & x+1 \\
\hline
-(4x^4 + 4x^3) & 4x^3 + 8x^2 + x - 3 \\
\quad 8x^3 + 9x^2 - 2x - 3 & \\
\quad -(8x^3 + 8x^2) & \\
\qquad x^2 - 2x - 3 & \\
\qquad -(x^2 + x) & \\
\qquad\quad -3x - 3 & \\
\qquad\quad -3x - 3 &
\end{array}
$$

(25 suite) Il suit que $P(x) = (x+1)(4x^3+8x^2+x-3)$ et que (évidement) $4x^3+8x^2+x-3$ est divisible par $(x-\frac{1}{2})$ et $(x+\frac{3}{2})$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3+8x^2+x-3 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{3-3}
- & (4x^3-2x^2) & 4x^2+10x+6 \\ \cline{2-2}
 & 10x^2+x-3 & \\
- & (10x^2-5x) & \\ \cline{2-2}
 & 6x-3 & \\
- & (6x-3) & \\ \cline{2-2}
 & / &
\end{array}$$

$\Rightarrow P(x) = (x+1)(x-\frac{1}{2})(4x^2+10x+6)$

et $4x^2+10x+6$ est divisible par $(x+\frac{3}{2})$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^2+10x+6 & x+\frac{3}{2} \\ \cline{3-3}
- & (4x^2+6x) & 4x+4 \\ \cline{2-2}
 & 4x+6 & \\
- & (4x+6) & \\ \cline{2-2}
 & / &
\end{array}$$

$$\boxed{P(x) = (x+1)(x-\tfrac{1}{2})\underbrace{(4x+4)}_{4\cdot(x+1)}(x+\tfrac{3}{2}) = \underline{4(x+1)^2(x-\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{3}{2})}}$$

b) Un tableau de signes va nous permettre de répondre

x		$-3/2$		-1		$1/2$	
$4(x+1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	−	−	−	−	−	0	+
$x+\frac{3}{2}$	−	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	$\boxed{-}$	0	$\boxed{-}$	0	+

$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) < 0\} =]-\frac{3}{2}; -1[\cup]-1; \frac{1}{2}[$

b) $g(x) = 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x = x \cdot \underbrace{(6x^3 + 5x^2 - 17x - 6)}_{j(x)}$

On applique le théorème des zéros rationnels sur $j(x)$: $c \in div(-6) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$

$d \in div(6) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$

$d \backslash c$	± 1	± 2	± 3	± 6
± 1	± 1	$\boxed{\pm 2}$	± 3	± 6
± 2	$\pm \frac{1}{2}$	$\cancel{\pm 1}$	$\boxed{\pm \frac{3}{2}}$	$\cancel{\pm 3}$
± 3	$\boxed{\pm \frac{1}{3}}$	$\pm \frac{2}{3}$	$\cancel{\pm 1}$	$\cancel{\pm 2}$
± 6	$\pm \frac{1}{6}$	$\cancel{\pm \frac{1}{3}}$	$\cancel{\pm \frac{1}{2}}$	$\cancel{\pm 1}$

On trouve

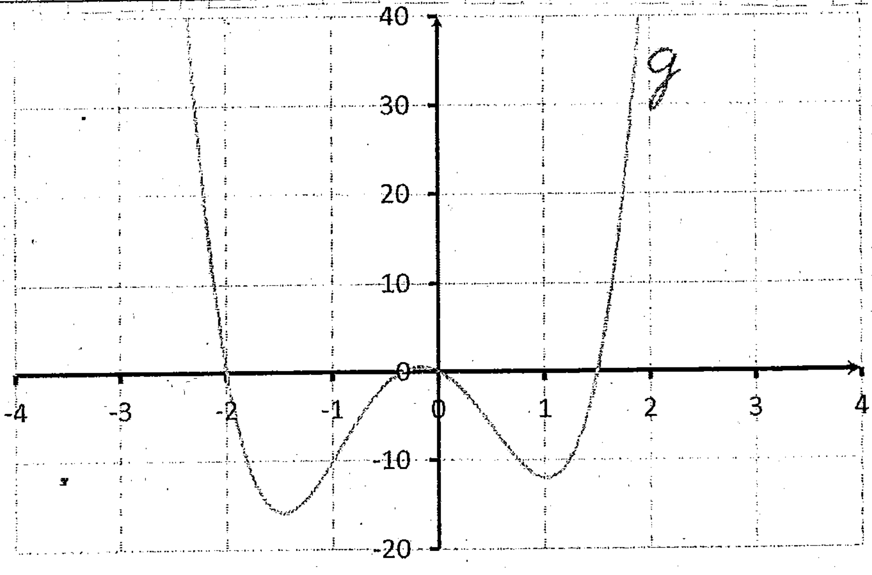
$Z_g = \left\{-2 ; -\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{3}{2}\right\}$

(On a trouvé 4 zéros et g est de degré 4 ⇒ on les a tous !)

Ainsi : $g(x) = 6x\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$g(x) = x\,(3x+1)(x+2)(2x-3)$

x		-2		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{3}{2}$	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



c) $h(x) = 3x^3 - x^2 + 11x - 20$

Identiquement $c \in div(-20) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4 ; \pm 5 ; \pm 10 ; \pm 20\}$
et $d \in div(3) = \{\pm 1 ; \pm 3\}$

On remarque $h\left(\frac{4}{3}\right) = 0$. Nous n'avons pas trouvé d'autres zéros rationnels, mais h pourrait avoir des zéros irrationnels. Il est donc nécessaire de faire la division polynomiale :

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - x^2 + 11x - 20 & x - \frac{4}{3} \\ \hline -(3x^3 - 4x^2) & 3x^2 + 3x + 15 \\ \quad 3x^2 + 11x - 20 & \\ \quad -(3x^2 - 4x) & \\ \qquad 15x - 20 & \\ \qquad 15x - 20 & \\ \hline \qquad / & \end{array}$$

$\Rightarrow h(x) = \left(x - \frac{4}{3}\right)(3x^2 + 3x + 15)$

$h(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x^2 + x + 5)$

$h(x) = (3x - 4)(x^2 + x + 5)$

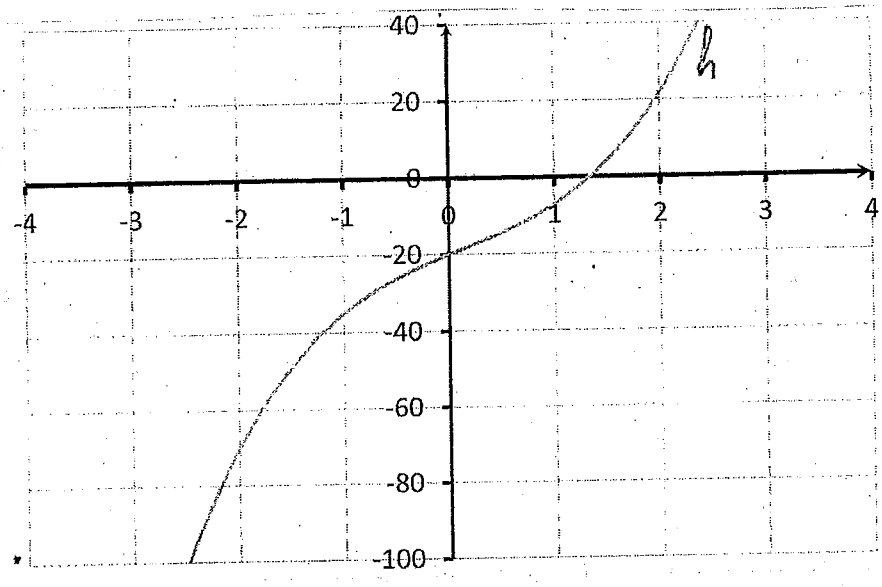
$h(x)$ a deux autres zéros si l'équation

$x^2 + x + 5 = 0$ a une solution.

Or, le discriminant de cette équation est $\Delta = -19 < 0$

Donc $h(x)$ possède un seul zéro. $Z_h = \{4/3\}$

x		$4/3$	
$3x-4$	$-$	0	$+$
x^2+x+5	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$



ex26 a) FAUX car f ne change pas de signe en -3 et -1. Ainsi la multiplicité des zéros (racines) -3 et -1 est paire (donc au moins 2). Donc f est une fonction polynomiale de degré 6 au moins.

b) Vrai car $-3 \in Z_f$ et -3 est un zéro de multiplicité paire (donc au moins 2) ainsi f est au moins divisible par $(x+3)^2$.

c) Faux car $f(-2)<0$ et $f(-2)$ est le reste de la division de $f(x)$ par $x+2$.

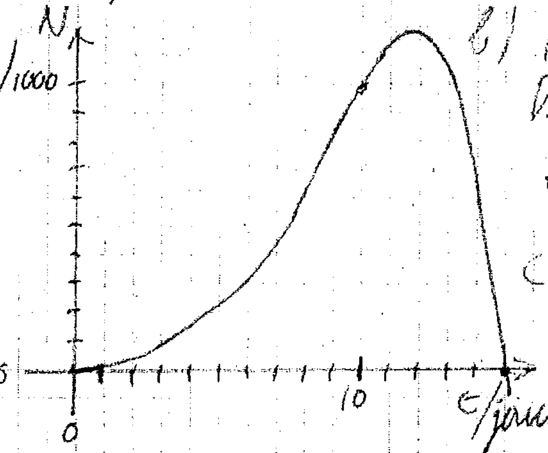
d) Faux car les coefficients de g ne sont pas des nombres entiers et donc le théorème des zéros rationnels n'est pas applicable.

ex27 Soit N le nombre de bactéries

On observe : $N(10 \text{ jours}) = 1'000$ et $N(15 \text{ jours}) = 0$.

On suppose $N(0)=0$

a)



b) Monte lentement $\Rightarrow$ 0 de multiplicité 2

Descend brusquement $\Rightarrow$ 15 de " 1

$Z_N = \{0; 15\}$

c) $N(t) = a\,t^2(t-15)$

On sait $N(10) = 1000$ $\Rightarrow$ $1'000 = a \cdot 10^2(10-15) = -500a$

$\Rightarrow a = -2$ $\quad N(t) = -2t^2(t-15)$

d) $N(5) = -2 \cdot 5^2(5-15) = 500$